Übungsaufgaben 13

Anfangswertprobleme zweiter Ordnung

Aufgabe 1. Man bestimme den linearen Raum aller zweimal stetig differenzierbaren Lösungen $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ der Differentialgleichung

$$D^2 v(t) = BDv(t) + Av(t) \quad \text{für } t \in \mathbb{R},$$

wobei die symmetrischen Matrizen A, $B \in L(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ durch

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -4 \\ 2 & -7 & -2 \\ -4 & -2 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

gegeben sind! ⑧

Aufgabe 2. Sei $\lambda > 0$ ein vorgegebene reelle Konstante. Man bestimme für jeden reellen Parameter $\delta > 0$ die zweimal stetig differenzierbare Lösung $u_\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des inhomogenen Anfangswertproblems

$$D^2 u_\delta(t) + \lambda^2 u_\delta(t) = \sin \delta t \quad \text{für } t \in \mathbb{R}, \quad u_\delta(0) = 0, \quad Du_\delta(0) = 0$$

ungedämpfter elastischer Schwingungen mit periodischer Erregung und unterscheide dabei den Fall $\delta \neq \lambda$ vom Fall $\delta = \lambda$ der *Resonanz!* In welchem Fall ist die Lösung beschränkt bzw. unbeschränkt? ⑥

Aufgabe 3. 1. Man bestimme für jeden Parameter $\delta \in \mathbb{R}$ die zweimal stetig differenzierbare Lösung $u_\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des homogenen Anfangswertproblems

$$D^2 u_\delta(t) = 4Du_\delta(t) - (4 - \delta^2) u_\delta(t) \quad \text{für } t \in \mathbb{R}, \quad u_\delta(0) = 2, \quad Du_\delta(0) = 2,$$

wobei die beiden Fälle $\delta = 0$ und $\delta \neq 0$ unterschieden werden sollen!

2. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ beliebig vorgegeben. Man zeige, daß die Beziehung

$$\lim_{\delta \to 0} \max_{t \in [a,b]} |u_\delta(t) - u_0(t)| = 0$$

der gleichmäßigen Konvergenz von (u_δ) gegen u_0 auf dem Intervall $[a, b]$ gilt! ⑥