Übungsaufgaben 2

Lineare Räume

Aufgabe 1. Für welche Wahl des Parameters $t \in \mathbb{R}$ wird durch die drei Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 1+t \end{pmatrix}$$

eine Basis im $\mathbb{R}^3$ gebildet? ⑥

Aufgabe 2. Seien vier Vektoren $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ und $u \in \mathbb{R}^3$ wie folgt gegeben:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. Man zeige, daß $\{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis im $\mathbb{R}^3$ ist!
2. Man berechne die Koordinaten x_1, x_2, $x_3 \in \mathbb{R}$ des Vektors $u = \sum_{\ell=1}^{3} x_\ell v_\ell$ bezüglich der Basis $\{v_1, v_2, v_3\}$! ⑥

Aufgabe 3. Ist V der lineare Raum aller stetigen Funktionen $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ über dem Körper $\mathbb{R}$, so betrachtet man dessen lineare Teilräume

$$V_0 = \left\{u \in V \mid \int_0^1 u(x)\,dx = 0\right\} \text{ und } V_1 = \left\{u \in V \mid u(x) = u(0) \text{ für alle } x \in [0,1]\right\}.$$

1. Man zeige, daß die Beziehungen $V = V_0 + V_1$ und $V_0 \cap V_1 = \{0\}$ gelten!
2. Man bestimme die Dimension $\dim V_0$ und die Codimension $\operatorname{codim} V_0 = \dim V_1$ des linearen Teilraums V_0 von V! ⑧