Übungsaufgaben 3

Lineare Abbildungen

Aufgabe 1. Sei V ein linearer Raum und $P_1 \in L(V;V)$ ein Projektor, das heißt, es gelte $P_1P_1 = P_1$. Sei ferner $I_V \in L(V;V)$ die identische Abbildung von V auf V.

1. Man zeige, daß $P_2 = I_V - P_1 \in L(V;V)$ ein Projektor ist, also $P_2P_2 = P_2$ gilt! Man beweise außerdem, daß die Beziehungen $P_1P_2 = 0$ und $P_2P_1 = 0$ gelten!

2. Man weise nach, daß $V = V_1 + V_2$ die direkte Summe der beiden linearen Teilräume $V_1 = P_1[V]$ und $V_2 = P_2[V]$ von V ist! ⑥

Aufgabe 2. Sei die lineare Abbildung $T \in L(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$ durch

$$T(x) = \begin{pmatrix} \frac{2}{7}x_1 + \frac{3}{7}x_2 + \frac{6}{7}x_3 \\ -\frac{6}{7}x_1 - \frac{2}{7}x_2 + \frac{3}{7}x_3 \\ \frac{3}{7}x_1 - \frac{6}{7}x_2 + \frac{2}{7}x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{für } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

sowie der lineare Teilraum $V_1 = \{z \in \mathbb{R}^3 \mid T(z) = z\}$ von $\mathbb{R}^3$ gegeben.

1. Man zeige, daß die lineare Abbildung $T \in L(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$ bijektiv ist und bestimme ihre inverse Abbildung $T^{-1} \in L(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$, indem man für jedes $y \in \mathbb{R}^3$ die Lösung $x \in \mathbb{R}^3$ der Gleichung $T(x) = y$ berechnet!

2. Man weise nach, daß der lineare Teilraum V_1 eindimensional ist, indem man die Lösungen $z \in V_1$ der Gleichung $T(z) - z = 0$ bestimmt!

3. Sei ein Vektor $z \in V_1$, $z \neq 0$ mit den Komponenten $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{R}$ sowie der lineare Teilraum $V_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid z_1x_1 + z_2x_2 + z_3x_3 = 0\}$ von $\mathbb{R}^3$ gegeben. Man beweise, daß neben $T[V_1] = V_1$ auch $T[V_2] = V_2$ gilt! ⑧

Aufgabe 3. Gegeben seien die Vektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix},\ u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ w_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. Man zeige, daß $\{u_1, u_2, u_3\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist!

2. Sei $S \in L(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$ jene lineare Abbildung, welche durch die Vorgabe der Bilder $S(u_1) = w_1$, $S(u_2) = w_2$, $S(u_3) = w_3$ eindeutig bestimmt wird. Man berechne jene Vektoren $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$, für welche die Darstellung $S(y) = y_1v_1 + y_2v_2 + y_3v_3$ für alle $y \in \mathbb{R}^3$ gilt! ⑥