Übungsaufgaben 4

Affine Teilräume und Hyperebenen

Aufgabe 1. Seien die drei affinen Hyperebenen

$$\begin{aligned} M_1 &= \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0\}, \\ M_2 &= \{x \in \mathbb{R}^3 \mid -x_1 - x_2 + 2x_3 = 2\}, \\ M_3 &= \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 + 2x_3 = 4\} \end{aligned}$$

in $\mathbb{R}^3$ gegeben. Man bestimme den Durchschnitt $M = \cap_{k=1}^{3} M_k$ dieser Ebenen! ⑥

Aufgabe 2. Seien Vektoren $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^3$ sowie ein Verschiebungsvektor $v \in \mathbb{R}^3$ durch

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{gegeben.}$$

1. Man zeige, daß $U = \operatorname{lin}\{u_1, u_2\}$ eine Hyperebene in $\mathbb{R}^3$ ist!
2. Man stelle die affine Hyperebene $M = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid u - v \in U\}$ von $\mathbb{R}^3$ in der Form

$$M = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = \mu\}$$

für geeignete Koeffizienten $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \mathbb{R}$ und eine rechte Seite $\mu \in \mathbb{R}$ dar! ⑥

Aufgabe 3. Seien die Funktionen $v_1, v_2, v_3, v_4 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ durch

$$v_1(x) = \cos x, \quad v_2(x) = \sin x, \quad v_3(x) = \cos 2x, \quad v_4(x) = \sin 2x \quad \text{für } x \in [0, 2\pi]$$

sowie der lineare Teilraum $U = \operatorname{lin}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ des linearen Raumes V aller reellwertigen Funktionen $u : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ über dem Körper $\mathbb{R}$ gegeben.

1. Man weise nach, daß $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ eine Basis von U ist!
2. Definiert man für jedes $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ die Linearform $f_k \in U^*$ durch

$$\langle f_k, u \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} v_k(x)\, u(x)\, dx \quad \text{für } u \in U,$$

so zeige man, daß $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ die zu $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ duale Basis von U^* bildet!

3. Man bestimme alle Funktionen $u \in U$, welche zu *jeder* der affinen Hyperebenen

$$\begin{aligned} M_1 &= \{u \in U \mid \langle 6f_1 + f_2 - f_3 + f_4, u \rangle = 7\} \\ M_2 &= \{u \in U \mid \langle 6f_1 - f_2 + f_3 + f_4, u \rangle = 3\} \\ M_3 &= \{u \in U \mid \langle 2f_1 - f_2 + f_3 - f_4, u \rangle = 1\} \\ M_4 &= \{u \in U \mid \langle 2f_1 - f_2 - f_3 + f_4, u \rangle = 1\} \end{aligned}$$

gehören! ⑧