Übungsaufgaben 5

Matrizenrechnung

Aufgabe 1. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $b \neq 0$, ferner die Funktionen $u_1, u_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$u_1(t) = \exp(at)\cos bt, \quad u_2(t) = \exp(at)\sin bt \quad \text{für } t \in \mathbb{R}$$

sowie der lineare Teilraum $U = \operatorname{lin}\{u_1, u_2\}$ des linearen Raums V aller Funktionen $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ über dem Körper $\mathbb{R}$ vorgegeben. Desweiteren werde der durch $T(u) = Du$ für $u \in U$ definierte lineare Differentialoperator $T \in L(U; U)$ betrachtet.

1. Man zeige, daß $B = \{u_1, u_2\}$ eine Basis von U ist!

2. Man bestimme die Koordinatendarstellung $\Phi_B T \Phi_B^{-1} \in L(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$, welche die Koordinaten $x = \Phi_B(u) \in \mathbb{R}^2$ von $u \in U$ bezüglich der Basis B auf die Bildkoordinaten $y = \Phi_B(T(u)) \in \mathbb{R}^2$ von $T(u) \in U$ bezüglich der Basis B abbildet! Welche Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ hat die Eigenschaft, daß $\big(\Phi_B T \Phi_B^{-1}\big)(x) = Ax$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$ gilt?

3. Man weise nach, daß der lineare Differentialoperator $T \in L(U; U)$ bijektiv ist und bestimme die Koordinatendarstellung $\Phi_B T^{-1} \Phi_B^{-1} \in L(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ der inversen Abbildung $T^{-1} \in L(U; U)$, indem man die inverse Matrix $A^{-1} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ berechnet und ausnutzt, daß $\big(\Phi_B T^{-1} \Phi_B^{-1}\big)(y) = A^{-1}y$ für alle $y \in \mathbb{R}^2$ gilt! ⑧

Aufgabe 2. Seien die Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ und der Vektor $y \in \mathbb{R}^4$ wie folgt gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

1. Man berechne alle Lösungen $x \in \mathbb{R}^3$ des Gleichungssystems $Ax = y$!
2. Man bestimme alle Lösungen $x \in \mathbb{R}^3$ des Gleichungssystems $A^\top Ax = A^\top y$! ⑥

Aufgabe 3. Sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 3 & 2 & 5 \\ 6 & -3 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

vorgegeben. Man bestimme den Kern $A^{-1}[\{0\}] \subset \mathbb{R}^3$ und den Bildraum $A[\mathbb{R}^3] \subset \mathbb{R}^3$ von $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ sowie den Kern $(A^\top)^{-1}[\{0\}] \subset \mathbb{R}^3$ und den Bildraum $A^\top[\mathbb{R}^3] \subset \mathbb{R}^3$ der transponierten Matrix $A^\top \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ (evtl. unter Ausnutzung der Dualität)! ⑥