Übungsaufgaben 6

Determinanten und Eigenwertprobleme

Aufgabe 1. Man finde jeweils durch Auswertung der Determinantengleichung

$$\begin{vmatrix} x_1 - w_1 & x_2 - w_2 & x_3 - w_3 \\ y_1 - w_1 & y_2 - w_2 & y_3 - w_3 \\ z_1 - w_1 & z_2 - w_2 & z_3 - w_3 \end{vmatrix} = 0$$

Parameter $\xi \in \mathbb{R}^3$ und $\mu \in \mathbb{R}$ derjenigen affinen Hyperebene

$$\{x \in \mathbb{R}^3 \mid \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = \mu\}$$

in $\mathbb{R}^3$, welche jeweils durch die drei Punkte

(1) $\quad y = (1, 1, 1), \quad z = (0, 2, 1), \quad w = (0, 1, 1),$

(2) $\quad y = (1, 2, 3), \quad z = (3, 0, 7), \quad w = (0, 1, -1),$

hindurchgeht! ⑥

Aufgabe 2. Seien die Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 7 & 12 & -8 \\ -2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3} \quad \text{gegeben.}$$

1. Man weise nach, daß die Matrizen A_1 und A_2 diagonalisierbar sind!

2. Man bestimme für jedes $k \in \{1, 2\}$ eine Basis B_k von $\mathbb{C}^3$ aus Eigenvektoren, so daß die Matrix $\Phi_{B_k} A_k \Phi_{B_k}^{-1} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ Diagonalgestalt erhält! ⑧

Aufgabe 3. Sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3} \quad \text{gegeben.}$$

1. Man zeige, daß die Matrix $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ einen dreifachen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ besitzt und *nicht* diagonalisierbar ist!

2. Man bestimme einen Eigenvektor $v_1 \in \mathbb{C}^3$ mit $Av_1 - \lambda v_1 = 0$ und $v_1 \neq 0$, einen Vektor $v_2 \in \mathbb{C}^3$ mit $Av_2 - \lambda v_2 = v_1$ und $v_2 \notin \operatorname{lin}\{v_1\}$ sowie einen Vektor $v_3 \in \mathbb{C}^3$ mit $Av_3 - \lambda v_3 = v_2$ und $v_3 \notin \operatorname{lin}\{v_1, v_2\}$!

3. Welche Koordinatendarstellung $\Phi_B A \Phi_B^{-1} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ hat die Matrix $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ bzgl. der Basis $B = \{v_1, v_2, v_3\}$? ⑥