Übungsaufgaben 7

# Skalarprodukt und Orthogonalität

**Aufgabe 1.** Durch die drei Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 12 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

wird ein Spat $S = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^3$ aufgespannt. Man berechne Rauminhalt und Oberflächeninhalt! ⑥

**Aufgabe 2.** Seien die Verschiebungsvektoren $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^4$ sowie die Richtungsvektoren $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^4$ der beiden affinen Geraden $G_1 = \{v_1 + \lambda_1 u_1 \in \mathbb{R}^4 \mid \lambda_1 \in \mathbb{R}\}$ und $G_2 = \{v_2 + \lambda_2 u_2 \in \mathbb{R}^4 \mid \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$ durch

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Man bestimme den kürzesten Vektor $w \in \mathbb{R}^4$, der die beiden Geraden $G_1$ und $G_2$ miteinander verbindet! Welche Länge hat dieser Vektor? ⑥

**Aufgabe 3.** Gegeben seien die Vektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \\ 5 \\ 24 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v = \begin{pmatrix} 7 \\ 55 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

1. Man bestimme Orthonormalbasen der linearen Teilräume $U = \text{lin}\{u_1, u_2\}$ sowie $U^\perp = \{u \in \mathbb{R}^4 \mid (u_1|u) = (u_2|u) = 0\}$ von $\mathbb{R}^4$!
2. Man berechne die Orthogonalprojektion und das Lot von $v$ auf $U$! ⑧

Übungsaufgaben 7*

# Symmetrische und orthogonale Operatoren

**Zusatzaufgabe 1.** Seien $V$ ein $n$-dimensionaler euklidischer Raum mit dem Skalarprodukt $(\ |\ ) : V \times V \to \mathbb{R}$ sowie $T \in L(V;V)$ ein symmetrischer Operator mit den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, wobei $\lambda_* \in \mathbb{R}$ der kleinste und $\lambda^* \in \mathbb{R}$ der größte Eigenwert von $T$ sein soll.

1. Man zeige, daß die Beziehung $\lambda_*(u|u) \leq (T(u)|u) \leq \lambda^*(u|u)$ für alle $u \in V$ gilt!

2. Man weise nach, daß im Falle $\lambda_* > 0$ durch $(u|v)_\circ = (T(u)|v)$ für $u, v \in V$ ein weiteres Skalarprodukt $(\ |\ )_\circ : V \times V \to \mathbb{R}$ in $V$ definiert wird! ⑥

**Zusatzaufgabe 2.** Gegeben seien die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix},\quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u_1 = \begin{pmatrix} -15 \\ -6 \\ 42 \end{pmatrix},\quad u_2 = \begin{pmatrix} 15 \\ 22 \\ 46 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

sowie die linearen Teilräume $V_k = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid (v_k|u) = 0\}$ von $\mathbb{R}^3$ und die Orthogonalprojektoren $P_k \in L(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$ von $\mathbb{R}^3$ auf $V_k$ für $k \in \{1,2,3\}$. Ferner werden das von $u_1, u_2$ aufgespannte Parallelogramm $\Pi = \{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq \alpha_1, \alpha_2 \leq 1\}$ sowie die Projektionen $\Pi_k = \{\alpha_1 P_k(u_1) + \alpha_2 P_k(u_2) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq \alpha_1, \alpha_2 \leq 1\}$ auf $V_k$ für $k \in \{1,2,3\}$ betrachtet. Man zeige, daß für die Flächeninhalte $F$, $F_1$, $F_2$, $F_3$ der Parallelogramme $\Pi, \Pi_1, \Pi_2, \Pi_3 \subset \mathbb{R}^3$ die Beziehung $F^2 = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2$ gilt! ⑧

**Zusatzaufgabe 3.** Sei die orthogonale symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{6}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{6}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{6}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \quad \text{gegeben.}$$

Man bestimme eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von $A$! ⑥