Übungsaufgaben 8

Differenzierbare Abbildungen

Aufgabe 1. Seien ein endlichdimensionaler euklidischer Raum V und ein symmetrischer Operator $T \in L(V;V)$ mit den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ vorgegeben, wobei $\lambda_* \in \mathbb{R}$ der kleinste und $\lambda^* \in \mathbb{R}$ der größte Eigenwert von T sein sollen. Desweiteren werde eine Abbildung $f : V \to \mathbb{R}$ durch $f(u) = (T(u)|u)$ für $u \in V$ definiert.

1. Man berechne die Extremwerte $\inf_{u \in K} f(u)$ sowie $\sup_{u \in K} f(u)$ von $f : V \to \mathbb{R}$ auf der abgeschlossenen Einheitskugel $K = \{u \in V \mid \|u\| \leq 1\}$ und gebe Extremstellen $v_* \in K$ sowie $v^* \in K$ an, in denen das Minimum $f(v_*) = \min_{u \in K} f(u)$ bzw. Maximum $f(v^*) = \max_{u \in K} f(u)$ angenommen wird!

2. Man zeige, daß $f : V \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Abbildung ist und bestimme ihre Ableitung $Df(u) \in L(V;\mathbb{R})$ in jedem $u \in V$! ⑥

Aufgabe 2. Betrachtet werde die Hohlkugel $X = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{1}{2} < \|x\| < 2\right\}$ sowie die durch $f(x) = \frac{x}{\|x\|^2}$ für $x \in X$ definierte Kelvin-Transformation $f : X \to \mathbb{R}^3$.

1. Man zeige, daß f eine bijektive Abbildung von X auf X ist und gebe ihre inverse Abbildung $f^{-1} : X \to \mathbb{R}^3$ an!

2. Man berechne für jedes $x \in X$ die Ableitung $Df(x) \in L(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$ sowie deren Eigenwerte und begründe, warum diese Funktionalmatrix diagonalisierbar ist! ⑧

Aufgabe 3. Seien auf dem offenen Kreis $X = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < 4\right\}$ die beiden Funktionen $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$ vorgegeben durch

$$f_1(x) = \sqrt{12 - 3x_1^2 - 3x_2^2} \quad \text{und} \quad f_2(x) = \sqrt{4 + x_1^2 + x_2^2} \quad \text{für } x \in X.$$

1. Man bestimme die Teilmenge $S = \left\{x \in X \mid f_1(x) = f_2(x)\right\}$ aller Punkte von X, in denen die Funktionen f_1 und f_2 dieselben Werte annehmen!

2. Man zeige, daß sich die Graphen der Funktionen f_1 und f_2 senkrecht schneiden, indem man beweist, daß sich die Graphen der Linearisierungen von f_1 und f_2 in jedem Punkt $x \in S$ als affine Teilräume des $\mathbb{R}^3$ senkrecht schneiden! ⑥