Übungsaufgaben 9

Kurven und Flächen im Raume

Aufgabe 1. Man weise nach, daß durch

$$\Psi(y) = \begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ y_1 - y_2 \\ 4y_1 y_2 \end{pmatrix} \quad \text{für } y \in \mathbb{R}^2$$

eine (globale) Parametrisierung $(\mathbb{R}^2, \Psi)$ der zweidimensionalen Untermannigfaltigkeit $P = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = x_1^2 - x_2^2\}$ von $\mathbb{R}^3$ definiert wird! ⑥

Aufgabe 2. Seien die Oberfläche $S = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\|^2 = 1\}$ der Einheitskugel im euklidischen Raum $\mathbb{R}^{n+1}$ sowie die jeweils um einen Punkt reduzierten Teilmengen

$$S_\oplus = \{x \in S \mid x_{n+1} < 1\} \text{ sowie } S_\ominus = \{x \in S \mid x_{n+1} > -1\}$$

von S gegeben. Man zeige, daß für $y \in \mathbb{R}^n$ durch

$$\Psi_\oplus(y) = \frac{2}{\|y\|^2 + 1} \begin{pmatrix} y \\ \frac{1}{2}\big(\|y\|^2 - 1\big) \end{pmatrix} \text{ und } \Psi_\ominus(y) = \frac{2}{\|y\|^2 + 1} \begin{pmatrix} y \\ \frac{1}{2}\big(1 - \|y\|^2\big) \end{pmatrix}$$

eine lokale Parametrisierung $(\mathbb{R}^n, \Psi_\oplus)$ von S nahe $x \in S_\oplus$ sowie eine lokale Parametrisierung $(\mathbb{R}^n, \Psi_\ominus)$ von S nahe $x \in S_\ominus$ definiert wird! ⑥

Aufgabe 3. Man zeige, daß sich für jede Wahl der reellen Parameter $\alpha_1 \neq 1, \alpha_2 \neq 0, \alpha_3 \neq 0$ die drei Kugeloberflächen

$$\begin{aligned} S_1 &= \{x \in \mathbb{R}^3 \mid (x_1 - \alpha_1)^2 + x_2^2 + x_3^2 = (1 - \alpha_1)^2\}, \\ S_2 &= \{x \in \mathbb{R}^3 \mid (x_1 - 1)^2 + (x_2 - \alpha_2)^2 + x_3^2 = \alpha_2^2\}, \\ S_3 &= \{x \in \mathbb{R}^3 \mid (x_1 - 1)^2 + x_2^2 + (x_3 - \alpha_3)^2 = \alpha_3^2\} \end{aligned}$$

jeweils paarweise senkrecht schneiden! ⑧