Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Dr. Jens A. Griepentrog

Mathematik für Naturwissenschaftler II
Sommersemester 2019
https://www.math.hu-berlin.de/~griepent/19/index.html

Klausur

15. Juli 2019

(90 Minuten)

Name: Vorname:

Studiengang: Matrikelnummer:

Ergebnis

Aufgabe	1	2	3	4	5	$\sum$
Mögliche Punktzahl	8	8	8	8	8	40
Erreichte Punktzahl						
Korrektor						

Hinweise:

1. Bitte füllen Sie das Deckblatt vollständig und gut lesbar aus!
2. Sie können in der Klausur als Hilfsmittel ein beidseitig von Hand beschriebenes A4-Blatt benutzen.
3. Bitte fangen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt an!
4. Numerieren Sie die Lösungsblätter durch und versehen Sie *alle* Blätter zusätzlich zu Ihrer Matrikelnummer auch mit Ihrem Namen!
5. Die Lösungen zu den Aufgaben sollen möglichst gut begründet werden!
6. Nach Beendigung der Klausur sind die Lösungsblätter im Faltblatt abzugeben!

Aufgabe 1. Man überprüfe, ob es einen eindimensionalen Teilraum V von $\mathbb{R}^3$ gibt, der zu allen drei affinen Hyperebenen

$$\begin{aligned} M_1 &= \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 - x_2 - x_3 = 7\}, \\ M_2 &= \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 6x_1 + x_2 + 5x_3 = -3\}, \\ M_3 &= \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4\} \end{aligned}$$

parallel ist und bestimme gegebenenfalls einen Richtungsvektor $v \in \mathbb{R}^3$, der die Gerade $V = \operatorname{lin}\{v\}$ erzeugt! ⑧

Lösung. 1. Eine Gerade $V = \operatorname{lin}\{v\}$ mit dem Richtungsvektor $v \in \mathbb{R}^3$, $v \neq 0$ ist genau dann parallel zu einer durch $\xi \in \mathbb{R}^3$, $\xi \neq 0$ und $\mu \in \mathbb{R}$ vorgegebenen affinen Hyperebene

$$M = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = \mu\},$$

wenn die Gerade $V = \operatorname{lin}\{v\}$ zur parallelverschobenen Hyperebene

$$U = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0\},$$

parallel ist, also $V \subset U$ und somit $v \in U$ gilt.

2. Damit muß der gesuchte Richtungsvektor $v \in \mathbb{R}^3$ von $V = \operatorname{lin}\{v\}$ eine Lösung $v \neq 0$ des linearen homogenen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 2v_1 - v_2 - v_3 &= 0 \\ 6v_1 + v_2 + 5v_3 &= 0 \\ 2v_1 + 2v_2 + 5v_3 &= 0 \end{aligned}$$

sein. Das Koeffizientenschema

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 6 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot 2 \\ + \\ + \end{matrix} \quad \text{wird mittels} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 8 & 0 & 4 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \mid :4 \\ \mid :3 \end{matrix}$$

elementar umgeformt. Daraus folgt

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} + \\ \cdot(-1) \\ + \end{matrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Also ist } v = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Richtungsvektor einer Geraden $V = \operatorname{lin}\{v\}$, die parallel zu den drei affinen Hyperebenen M_1, M_2, M_3 verläuft. □

Aufgabe 2. 1. Man berechne die Eigenwerte sowie eine Basis des $\mathbb{R}^3$ aus orthogonalen Eigenvektoren der symmetrischen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 9 & -6 \\ 2 & -6 & 4 \end{pmatrix} \in L(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)!$$

2. Man bestimme eine Basis des linearen Raums V aller stetig differenzierbaren Lösungen $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ der Differentialgleichung $Dv(t) = Av(t)$ für $t \in \mathbb{R}$! ⑧

Lösung. 1. Aufgrund ihrer Symmetrie ist die Matrix A diagonalisierbar und hat ausschließlich reelle Eigenwerte. Die charakteristische Gleichung

$$0 = \det(A - \lambda E_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 2 \\ -3 & 9-\lambda & -6 \\ 2 & -6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 2 \\ -3\lambda & -\lambda & 0 \\ 2\lambda & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 14-\lambda & -3 & 2 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

liefert $\lambda^2(\lambda - 14) = 0$. Man erhält $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ und $\lambda_3 = 14$ als Eigenwerte von A.

2. Gesucht werden zwei orthogonale Eigenvektoren $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^3$ zu $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, also Lösungen $u \in \mathbb{R}^3$ des Gleichungssystems $(A - \lambda_1 E_3)u = 0$. Elementare Umformungen

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 9 & -6 \\ 2 & -6 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot 3 \quad \cdot(-2) \\ + \\ + \end{array} \quad \text{liefern} \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und somit } u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

als orthogonale Eigenvektoren zu $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

3. Um einen Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_3 = 14$ zu finden, wird eine Lösung $u \in \mathbb{R}^3$ des linearen Gleichungssystems $(A - \lambda_3 E_3)u = 0$ gesucht. Elementare Umformungen

$$\begin{pmatrix} -13 & -3 & 2 \\ -3 & -5 & -6 \\ 2 & -6 & -10 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot 3 \quad \cdot 5 \\ + \\ + \end{array} \quad \text{führen auf} \quad \begin{pmatrix} -13 & -3 & 2 \\ -42 & -14 & 0 \\ -63 & -21 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \mid : (-14) \\ \mid : 21 \end{array}$$

sowie

$$\begin{pmatrix} -13 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} + \\ \cdot 3 \\ + \end{array} \quad \text{und damit} \quad \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad \text{Also ist} \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor zu $\lambda_3 = 14$. Da der Eigenvektor $u_3 \in \mathbb{R}^3$ senkrecht auf den orthogonalen Eigenvektoren $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^3$ zu $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ steht, ist $\{u_1, u_2, u_3\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ aus orthogonalen Eigenvektoren der Matrix A.

4. Der Lösungsraum der Differentialgleichung $Dv(t) = Av(t)$ für $t \in \mathbb{R}$ ist die lineare Hülle $V = \operatorname{lin}\{v_1, v_2, v_3\}$ der Funktionen $v_1, v_2, v_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, die durch die Vorschrift $v_1(t) = u_1$, $v_2(t) = u_2$ und $v_3(t) = u_3 \exp(14t)$ für $t \in \mathbb{R}$ gegeben werden. □

Aufgabe 3. Seien drei Kugeloberflächen mit dem Radius $r = 3$ und den Mittelpunkten

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ gegeben.}$$

Man zeige, daß *zwei* affine Hyperebenen in $\mathbb{R}^3$ existieren, welche jeweils alle drei Kugeloberflächen *berühren* und bestimme die Parameter $\xi \in \mathbb{R}^3$ und $\mu \in \mathbb{R}$ einer Gleichungsdarstellung $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid (\xi|x) = \mu\}$ für jede dieser beiden Ebenen! 8

Lösung. 1. Die Verbindungsvektoren $v - u \in \mathbb{R}^3$ und $w - u \in \mathbb{R}^3$ der Mittelpunkte u, v und w sind linear unabhängig und spannen eine lineare Hyperebene $V = \operatorname{lin}\{v-u, w-u\}$ in $\mathbb{R}^3$ auf. Die dazu parallele affine Hyperebene

$$M = \{u + s(v-u) + t(w-u) \in \mathbb{R}^3 \mid s, t \in \mathbb{R}\}$$

verläuft durch die drei Mittelpunkte u, v und w. Die beiden zu M parallelen affinen Hyperebenen M_1 und M_2 in $\mathbb{R}^3$, welche den Abstand $r = 3$ zu M haben, berühren jeweils alle drei Kugeloberflächen mit dem Radius $r = 3$, da die Radiusvektoren, welche die Mittelpunkte mit den Berührungspunkten verbinden, senkrecht auf V stehen.

2. Um einen zur Hyperebene $V = \operatorname{lin}\{v - u, w - u\}$ orthogonalen Vektor $\xi \in \mathbb{R}^3$ zu finden, liefert das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} \xi_1 & + & 2\xi_2 & + & 2\xi_3 & = & 0 \\ 2\xi_1 & - & 2\xi_2 & + & \xi_3 & = & 0 \quad + \end{array} \quad \text{zunächst} \quad \begin{array}{rcrcrcl} \xi_1 & + & 2\xi_2 & + & 2\xi_3 & = & 0 \quad + \\ 3\xi_1 & & & + & 3\xi_3 & = & 0 \mid :3 \quad \cdot(-1) \end{array}$$

und somit $2\xi_2 + \xi_3 = 0$ sowie $\xi_1 + \xi_3 = 0$, also $\xi_1 = 2$, $\xi_2 = 1$, $\xi_3 = -2$ und $\|\xi\| = 3$.

Wegen $V = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid (\xi|x) = 0\}$ und $(\xi|u) = 5$ ergibt sich die Darstellung

$$M = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid (\xi|x - u) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid (\xi|x) = 5\}$$

der zu V parallelen affinen Hyperebene M durch u, v und w. Da die Ebenen M_1 und M_2 den Abstand $r = 3$ zu M haben, kann man M_1 bzw. M_2 durch eine Parallelverschiebung von M in Richtung des Vektors $\pm\frac{r\xi}{\|\xi\|} \in \mathbb{R}^3$ der Länge $r = 3$ durch den Punkt

$$y = u + \frac{r\xi}{\|\xi\|} \in M_1 \quad \text{bzw.} \quad z = u - \frac{r\xi}{\|\xi\|} \in M_2$$

festlegen. Aus $M_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid (\xi|x - y) = 0\}$ und $M_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid (\xi|x - z) = 0\}$ folgen wegen $(\xi|y) = (\xi|u) + r\|\xi\| = 14$ und $(\xi|z) = (\xi|u) - r\|\xi\| = -4$ die Darstellungen

$$M_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid (\xi|x) = 14\} \quad \text{und} \quad M_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid (\xi|x) = -4\}$$

der beiden gesuchten affinen Hyperebenen. □

Aufgabe 4. Seien die beiden Untermannigfaltigkeiten H und E von $\mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$H = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 = 2\},$$
$$E = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 = 6\}.$$

Man zeige, daß sich die beiden Tangentialräume an das *einschalige Hyperboloid* H und das *Ellipsoid* E in jedem Schnittpunkt $x \in H \cap E$ *senkrecht* schneiden! ⑧

Lösung. 1. Zunächst soll der Durchschnitt $H \cap E$ der beiden Flächen bestimmt werden: Da für jedes $x \in H \cap E$ die beiden quadratischen Gleichungen

$$x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 = 2,$$
$$x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 = 6$$

erfüllt sind, ergibt sich durch Addition $x_1^2 + x_2^2 = 4$ und durch Subtraktion $x_3^2 = 1$. Der Durchschnitt $H \cap E = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = 4,\ x_3^2 = 1\}$ besteht aus zwei Kreislinien.

2. Definiert man die darstellenden Funktionen $F, G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ der Untermannigfaltigkeiten $H = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid F(x) = 0\}$ und $E = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid G(x) = 0\}$ durch

$$F(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 - 2,$$
$$G(x) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 6$$

für $x \in \mathbb{R}^3$, dann erhält man als Tangentialräume U an H bzw. V an E in einem beliebig gewählten Schnittpunkt $x \in H \cap E$ die beiden Hyperebenen

$$U = \{\eta \in \mathbb{R}^3 \mid \langle DF(x), \eta\rangle = 0\} = \{\eta \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1\eta_1 + 2x_2\eta_2 - 4x_3\eta_3 = 0\},$$
$$V = \{\xi \in \mathbb{R}^3 \mid \langle DG(x), \xi\rangle = 0\} = \{\xi \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1\xi_1 + 2x_2\xi_2 + 4x_3\xi_3 = 0\}.$$

3. Da das orthogonale Komplement $U^\perp = \operatorname{lin}\{\xi\}$ von U in $\mathbb{R}^3$ vom Richtungsvektor $\xi \in \mathbb{R}^3$ mit den Komponenten $\xi_1 = 2x_1$, $\xi_2 = 2x_2$ sowie $\xi_3 = -4x_3$ erzeugt wird und wegen $x_1^2 + x_2^2 = 4$ sowie $x_3^2 = 1$ die Beziehung

$$2x_1\xi_1 + 2x_2\xi_2 + 4x_3\xi_3 = 4\big(x_1^2 + x_2^2 - 4x_3^2\big) = 0$$

und somit $\xi \in V$ gilt, ist $U^\perp$ ein linearer Teilraum von V. Daher müssen sich die Tangentialräume U an H bzw. V an E im Schnittpunkt $x \in H \cap E$ senkrecht schneiden. □

Aufgabe 5. Sei $h : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ diejenige *radialsymmetrische* Funktion, welche durch

$$h(x) = \frac{1}{\|x\|^2(1 + \|x\|^2)} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \text{ gegeben wird.}$$

Man berechne das uneigentliche Raumintegral $\int_{\mathbb{R}^3} h(x)\,dx$, indem man zunächst für jeden Radius $r > 0$ das Oberflächenintegral $f(r) = \int_{S(r)} h(x)\,dx$ von h über die Kugeloberfläche $S(r) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = r\}$ bildet und anschließend das uneigentliche Integral $\int_{\mathbb{R}^3} h(x)\,dx = \int_0^\infty f(r)\,dr$ bestimmt! ⑧

Lösung. 1. Sei $r > 0$ vorgegeben. Jeder Punkt $x \in S(r)$ der kann mit der durch

$$\Psi(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\cos\theta \\ r\sin\varphi\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} \quad \text{für } \varphi \in [0, 2\pi],\ \theta \in \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right]$$

gegebenen sphärischen Parametrisierung $\Psi : [0, 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^3$ beschrieben werden. Für die Ableitung $D\Psi$ und deren Gram-Matrix gilt

$$D\Psi(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} -r\sin\varphi\cos\theta & -r\cos\varphi\sin\theta \\ r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ 0 & r\cos\theta \end{pmatrix}, \quad D\Psi(\varphi, \theta)^\intercal D\Psi(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} r^2\cos^2\theta & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix},$$

woraus sich $\sqrt{\det D\Psi(\varphi, \theta)^\intercal D\Psi(\varphi, \theta)} = r^2\cos\theta$ ergibt.

2. Das Oberflächenintegral

$$f(r) = \int_{S(r)} h(x)\,dx = \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} h(\Psi(\varphi, \theta)) \sqrt{\det D\Psi(\varphi, \theta)^\intercal D\Psi(\varphi, \theta)}\,d\theta\,d\varphi$$

wird durch Transformation auf sphärische Koordinaten berechnet. Da für jeden Punkt $x = \Psi(\varphi, \theta) \in S(r)$ stets $\|x\| = r$ gilt und sich aus

$$h(x) = \frac{1}{\|x\|^2(1 + \|x\|^2)} \quad \text{folglich} \quad h(\Psi(\varphi, \theta)) = \frac{1}{r^2(1 + r^2)}$$

ergibt, erhält man

$$f(r) = \int_{S(r)} h(x)\,dx = \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{r^2\cos\theta}{r^2(1 + r^2)}\,d\theta\,d\varphi = \frac{4\pi}{1 + r^2} \quad \text{für jedes } r > 0.$$

Daraus folgt schließlich

$$\int_{\mathbb{R}^3} h(x)\,dx = \int_0^\infty f(r)\,dr = 4\pi \lim_{r\to\infty} \arctan r - 4\pi \lim_{r\downarrow 0} \arctan r = 2\pi^2$$

für das gesuchte uneigentliche Raumintegral. □