Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Dr. Jens A. Griepentrog

Mathematik für Naturwissenschaftler II
Sommersemester 2019
https://www.math.hu-berlin.de/~griepent/19/index.html

Musterklausur

24. Juni 2019

(90 Minuten)

Name: Vorname:

Studiengang: Matrikelnummer:

Ergebnis

Aufgabe	1	2	3	4	5	$\sum$
Mögliche Punktzahl	8	8	8	8	8	40
Erreichte Punktzahl						
Korrektor						

Hinweise:

1. Bitte füllen Sie das Deckblatt vollständig und gut lesbar aus!
2. Sie können in der Klausur als Hilfsmittel ein beidseitig von Hand beschriebenes A4-Blatt benutzen.
3. Bitte fangen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt an!
4. Numerieren Sie die Lösungsblätter durch und versehen Sie *alle* Blätter zusätzlich zu Ihrer Matrikelnummer auch mit Ihrem Namen!
5. Die Lösungen zu den Aufgaben sollen möglichst gut begründet werden!
6. Nach Beendigung der Klausur sind die Lösungsblätter im Faltblatt abzugeben!

Aufgabe 1. Gegeben seien die drei affinen Hyperebenen

$$\begin{aligned} M_1 &= \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0\}, \\ M_2 &= \{x \in \mathbb{R}^3 \mid -x_1 - x_2 + 2x_3 = 2\}, \\ M_3 &= \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 + 2x_3 = 4\}, \end{aligned}$$

und der Punkt $y \in \mathbb{R}^3$ mit den Koordinaten $y_1 = -2$, $y_2 = -3$, $y_3 = 0$. Welchen Abstand hat der Punkt $y \in \mathbb{R}^3$ vom affinen Teilraum $M = M_1 \cap M_2 \cap M_3$? ⑧

Lösung. 1. Die Vektoren $x \in M$, die zu den affinen Hyperebenen M_1, M_2 und M_3 gehören, stimmen mit der Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

überein. Elementare Umformungen des erweiterten Koeffizietenschemas

$$\begin{array}{cl} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \end{array}\right) & \begin{array}{l} + \\ + \\ \cdot(-1) \end{array} \end{array} \quad \text{liefern} \quad \begin{array}{cl} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \end{array}\right) & \begin{array}{l} \mid :4 \\ \mid :2 \\ \end{array} \end{array}$$

und führen auf

$$\begin{array}{cl} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \end{array}\right) & \begin{array}{l} \cdot(-1) \\ + \\ + \end{array} \end{array} \quad \text{und somit zu} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right).$$

Man erhält als Lösungsmenge die Gerade $M = \{(1, 2s-3, s) \in \mathbb{R}^3 \mid s \in \mathbb{R}\}$. Die affinen Hyperebenen M_1, M_2 und M_3 im $\mathbb{R}^3$ schneiden sich in dieser Geraden.

2. Der Punkt $x(s) = (1, 2s-3, s) \in M$ der Geraden mit dem Parameter $s \in \mathbb{R}$ hat vom Punkt $y = (-2,-3,0) \in \mathbb{R}^3$ das Abstandsquadrat

$$\|x(s) - y\|^2 = |x_1(s) - y_1|^2 + |x_2(s) - y_2|^2 + |x_3(s) - y_3|^2.$$

Um den Parameter $s \in \mathbb{R}$ zu finden, welcher den kürzesten Abstand zwischen y und der Geraden M realisiert, wird eine Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$h(s) = \|x(s) - y\|^2 = 9 + |2s|^2 + s^2 = 9 + 5s^2 \quad \text{für } s \in \mathbb{R} \text{ definiert.}$$

Zur Bestimmung des Minimums der Funktion h werden die erste und zweite Ableitung $Dh(s) = 10s$ und $D^2h(s) = 10$ für $s \in \mathbb{R}$ berechnet.

Die Gleichung $Dh(s) = 0$ hat die Lösung $s = 0$. Wegen $D^2h(0) > 0$ nimmt die Funktion h in $s = 0$ ihr Minimum an. Damit ist $x(0) = (1,-3,0)$ derjenige Punkt auf der Geraden M, der zu $y = (-2,-3,0)$ den kürzesten Abstand hat, welcher somit den Wert $\|x(0) - y\| = 3$ hat. □

Aufgabe 2. Betrachtet werde die symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -6 \\ 0 & 3 & -6 \\ -6 & -6 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Man bestimme Eigenwerte und Eigenräume sowie Kern und Bild der Matrix A! ⑧

Lösung. 1. Zur Bestimmung der Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{R}$ von A wird die Determinante

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 0 & -6 \\ 0 & 3-\lambda & -6 \\ -6 & -6 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda+3)(\lambda-3) + 36(\lambda-3) + 36(\lambda+3)$$

berechnet. Die charakteristische Gleichung $\det(A - \lambda E_3) = 0$ liefert $\lambda(\lambda-9)(\lambda+9) = 0$. Ihre Nullstellen $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 9$ und $\lambda_3 = -9$ sind die Eigenwerte der Matrix A.

2.1. Eigenvektoren $u_1 \in \mathbb{R}^3$ zum Eigenwert $\lambda_1 = 0$ lösen das lineare Gleichungssystem $Au_1 = 0$. Elementare Umformungen der Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & -6 \\ 0 & 3 & -6 \\ -6 & -6 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot(-2) \\ \cdot 2 \\ + \quad + \end{array} \quad \text{führen zu} \quad \begin{pmatrix} -3 & 0 & -6 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad u_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist $\operatorname{lin}\{u_1\}$ der Eigenraum zu $\lambda_1 = 0$, also der Kern von A. Wegen der Symmetrie $A^\intercal = A$ ergibt sich $A[\mathbb{R}^3] = A^\intercal[\mathbb{R}^3] = \big\{x \in \mathbb{R}^3 \mid -2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\big\}$ als Bild von A.

2.2. Eigenvektoren $u_2 \in \mathbb{R}^3$ zum Eigenwert $\lambda_2 = 9$ sind Lösungen des linearen Gleichungssystems $(A - \lambda_2 E_3)u_2 = 0$. Elementare Umformungen der Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} -12 & 0 & -6 \\ 0 & -6 & -6 \\ -6 & -6 & -9 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \mid :2 \quad \cdot(-1) \\ \cdot(-1) \\ + \quad + \end{array} \quad \text{liefern} \quad \begin{pmatrix} -6 & 0 & -3 \\ 0 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Daher ist $\operatorname{lin}\{u_2\}$ der Eigenraum zu $\lambda_2 = 9$.

2.3. Eigenvektoren $u_3 \in \mathbb{R}^3$ zum Eigenwert $\lambda_3 = -9$ erhält man durch Lösung des linearen Gleichungssystems $(A - \lambda_3 E_3)u_3 = 0$. Dazu führen elementare Umformungen der Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & -6 \\ 0 & 12 & -6 \\ -6 & -6 & 9 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \mid :2 \\ + \quad + \end{array} \quad \text{auf} \quad \begin{pmatrix} 6 & 0 & -6 \\ 0 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{also zu} \quad u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Damit ist $\operatorname{lin}\{u_3\}$ der Eigenraum zu $\lambda_3 = -9$. □

Aufgabe 3. Durch die drei Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

wird ein Spat $S = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^3$ aufgespannt. Man berechne den Rauminhalt und den Oberflächeninhalt des Spats! ⑧

Lösung. 1. Der Rauminhalt R des Spats S wird als Wurzel aus der Gram-Determinante

$$\det G(v_1, v_2, v_3) = \begin{vmatrix} (v_1|v_1) & (v_1|v_2) & (v_1|v_3) \\ (v_2|v_1) & (v_2|v_2) & (v_2|v_3) \\ (v_3|v_1) & (v_3|v_2) & (v_3|v_3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 49 & 0 & 0 \\ 0 & 49 & 0 \\ 0 & 0 & 49 \end{vmatrix} = 49^3 = 343^2$$

berechnet, also folgt $R = 343$ für den Rauminhalt.

2. Der Spat $S \subset \mathbb{R}^3$ wird von sechs paarweise deckungsgleichen, in parallelen Ebenen liegenden Parallelogrammen begrenzt, die jeweils von zwei der drei Vektoren v_1, v_2, v_3 aufgespannt werden. Die Flächeninhalte F_i jedes Parallelogramms werden mit Hilfe von Gram-Determinanten

$$F_1^2 = \det G(v_2, v_3) = \begin{vmatrix} (v_2|v_2) & (v_2|v_3) \\ (v_3|v_2) & (v_3|v_3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 49 & 0 \\ 0 & 49 \end{vmatrix} = 49^2,$$

$$F_2^2 = \det G(v_1, v_3) = \begin{vmatrix} (v_1|v_1) & (v_1|v_3) \\ (v_3|v_1) & (v_3|v_3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 49 & 0 \\ 0 & 49 \end{vmatrix} = 49^2,$$

$$F_3^2 = \det G(v_1, v_2) = \begin{vmatrix} (v_1|v_1) & (v_1|v_2) \\ (v_2|v_1) & (v_2|v_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 49 & 0 \\ 0 & 49 \end{vmatrix} = 49^2,$$

berechnet. Somit folgt $F = 2F_1 + 2F_2 + 2F_3 = 294$ für den Oberflächeninhalt. □

Aufgabe 4. Welchen Flächeninhalt hat diejenige Teilmenge der Sattelfläche

$$P = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = x_1 x_2\},$$

welche zum Kreiszylinder $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ gehört! ⑧

Lösung. 1. Zur Parametrisierung werden Polarkoordinaten $(r,\varphi) \in [0,\infty[\times [0,2\pi]$ benutzt. Definiert man die Abbildung $\Psi : [0,\infty[\times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ durch

$$\Psi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ r^2\cos\varphi\sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ \frac{1}{2}r^2\sin 2\varphi \end{pmatrix} \quad \text{gemäß} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1x_2 \end{pmatrix} \in P,$$

dann bildet Ψ den Parameterbereich $[0,1[\times [0,2\pi]$ auf den Teil der Sattelfläche P ab, der zum gegebenen Kreiszylinder gehört.

2. Für den Flächeninhalt wird für jedes $(r,\varphi) \in [0,1[\times [0,2\pi]$ die Ableitung

$$D\Psi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \\ r\sin 2\varphi & r^2\cos 2\varphi \end{pmatrix} \in L(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^3)$$

und daraus die Gram-Determinante

$$\det D\Psi(r,\varphi)^\intercal D\Psi(r,\varphi) = \begin{vmatrix} 1 + (r\sin 2\varphi)^2 & r^3\sin 2\varphi\cos 2\varphi \\ r^3\sin 2\varphi\cos 2\varphi & r^2 + (r^2\cos 2\varphi)^2 \end{vmatrix} = r^2(1+r^2)$$

berechnet.

3. Der Flächeninhalt F des Teils der Sattelfläche P, der zum gegebenen Kreiszylinder gehört, wird mit Hilfe der Parametrisierung und der Wurzel der zuvor berechneten Gram-Determinante durch das Integral

$$F = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{\det D\Psi(r,\varphi)^\intercal D\Psi(r,\varphi)}\, d\varphi\, dr = 2\pi \int_0^1 r\sqrt{1+r^2}\, dr$$

ausgedrückt. Da die durch $f(r) = (1+r^2)^{3/2}$ für $r \in \mathbb{R}$ definierte Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Ableitung $Df(r) = 3r\sqrt{1+r^2}$ besitzt, ergibt sich das Integral

$$F = 2\pi \int_0^1 r\sqrt{1+r^2}\, dr = 2\pi\, \frac{f(1) - f(0)}{3} = \frac{2\pi}{3}\,(2\sqrt{2} - 1)$$

als Flächeninhalt F des Teils der Sattelfläche P, der zum Kreiszylinder gehört. □

Aufgabe 5. Welche Bahnkurve $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ durchläuft ein Massenpunkt, der sich gemäß des Anfangswertproblems

$$\begin{pmatrix} Dx_1(t) \\ Dx_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \quad \text{für } t \in \mathbb{R}, \qquad \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bewegt? ⑧

Lösung. 1. Die homogene Differentialgleichung erster Ordnung mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \mathbb{0} & -\mathbb{4} \\ \mathbb{1} & \mathbb{0} \end{pmatrix} \in L(\mathbb{C}^2; \mathbb{C}^2)$$

hat die charakteristische Gleichung

$$\mathbb{0} = \det(A - \mu E_2) = \begin{vmatrix} -\mu & -\mathbb{4} \\ \mathbb{1} & -\mu \end{vmatrix} = \mu^2 + \mathbb{4}$$

und damit das Paar komplex konjugierter Eigenwerte $\mu = 2\mathbb{i} \in \mathbb{C}$ und $\overline{\mu} = -2\mathbb{i} \in \mathbb{C}$.

2. Um einen zum Eigenwert $\mu = 2\mathbb{i} \in \mathbb{C}$ gehörenden Eigenvektor $z \in \mathbb{C}^2$ zu finden, wird das lineare homogene Gleichungssystem $(A - \mu E_2)z = \mathbb{0}$ gelöst. Elementare Umformungen des Koeffizientenschemas

$$\begin{pmatrix} -\mathbb{2}\mathbb{i} & -\mathbb{4} \\ \mathbb{1} & -\mathbb{2}\mathbb{i} \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow + \\ \cdot 2\mathbb{i} \end{matrix} \quad \text{liefern} \quad \begin{pmatrix} \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \mathbb{1} & -\mathbb{2}\mathbb{i} \end{pmatrix}, \quad \text{also } z = \begin{pmatrix} \mathbb{2}\mathbb{i} \\ \mathbb{1} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$$

als Eigenvektor zu $\mu = 2\mathbb{i}$ und somit den komplex konjugierten Eigenvektor $\overline{z} \in \mathbb{C}^2$ zum komplex konjugierten Eigenwert $\overline{\mu} = -2\mathbb{i}$.

3. Daraus ergeben sich für die Differentialgleichung die beiden linear unabhängigen Lösungen $u_1(t) = z\,\mathrm{Exp}(2\mathbb{i}t)$ und $u_2(t) = \overline{z}\,\mathrm{Exp}(-2\mathbb{i}t)$. Bildet man Real- und Imaginärteil der Lösung $u_1(t) = z\,\mathrm{Exp}(2\mathbb{i}t)$, dann erhält man ein Fundamentailsystem zweier reeller Lösungen und somit die Darstellung der allgemeinen Lösung

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \xi_1 \begin{pmatrix} -2\sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix} + \xi_2 \begin{pmatrix} 2\cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix}$$

der Differentialgleichung mit den Koordinaten $\xi \in \mathbb{R}^2$.

4. Aus den Anfangsbedingungen $x_1(0) = 2$ und $x_2(0) = 0$ ergibt sich $\xi_2 = 1$ und $\xi_1 = 0$. Somit erhält man

$$x(t) = \begin{pmatrix} 2\cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix} \quad \text{für } t \in \mathbb{R}$$

als Lösung des Anfangswertproblems. □