Übungsaufgaben 1

Lineare Gleichungssysteme

Aufgabe 1. Man bestimme jeweils die Menge aller stöchiometrischen Koeffizienten $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ für die chemische Reaktion

(1) $$x_1 \cdot CH_4 + x_2 \cdot O_2 + x_3 \cdot NH_3 \rightleftharpoons x_4 \cdot HCN + x_5 \cdot H_2O$$

(2) $$x_1 \cdot C_2H_5OH + x_2 \cdot O_2 \rightleftharpoons x_3 \cdot CO_2 + x_4 \cdot H_2O$$

und wähle jeweils eine Lösung mit positiven ganzzahligen Koeffizienten aus! ⑥

Lösung. 1. Für jedes Element C, H, O und N wird eine Bilanzgleichung aufgestellt. Daraus ergibt sich ein homogenes System von vier Gleichungen für fünf Unbekannte:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
-x_1 & & & & & + & x_4 & & & = & 0 \quad \cdot(-4) \\
-4x_1 & & & - & 3x_3 & + & x_4 & + & 2x_5 & = & 0 \quad + \quad + \\
 & & -2x_2 & & & & & + & x_5 & = & 0 \\
 & & & & -x_3 & + & x_4 & & & = & 0. \quad \cdot(-3)
\end{array}$$

Äquivalente Unformungen liefern zunächst

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
-x_1 & & & & & + & x_4 & & & = & 0 \mid \cdot(-1) \\
 & & & & & & -6x_4 & + & 2x_5 & = & 0 \mid :2 \\
 & & -2x_2 & & & & & + & x_5 & = & 0 \mid \cdot(-1) \\
 & & & & -x_3 & + & x_4 & & & = & 0 \mid \cdot(-1)
\end{array}$$

sowie desweiteren

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
x_1 & & & & & - & x_4 & & & = & 0 \\
 & & & & & & -3x_4 & + & x_5 & = & 0 \\
 & & 2x_2 & & & & & - & x_5 & = & 0 \quad + \\
 & & & & x_3 & - & x_4 & & & = & 0
\end{array}$$

und schließlich

$$\begin{array}{rrrrcl}
x_1 & & & - & x_4 & = 0 \\
 & 2x_2 & & - & 3x_4 & = 0 \\
 & & x_3 & - & x_4 & = 0 \\
 & & x_5 & - & 3x_4 & = 0.
\end{array}$$

Als Lösungsmenge ergibt sich $\left\{\left(x_4, \frac{3}{2}x_4, x_4, x_4, 3x_4\right) \in \mathbb{R}^5 \mid x_4 \in \mathbb{R}\right\}$. Setzt man $x_4 = 2 \in \mathbb{N}$ ein, so folgt die Reaktionsgleichung

$$2\,CH_4 + 3\,O_2 + 2\,NH_3 \rightleftharpoons 2\,HCN + 6\,H_2O.$$

2. Für jedes Element C, H und O wird eine Bilanzgleichung aufgestellt. Daraus ergibt sich ein homogenes System von drei Gleichungen für vier Unbekannte:

$$\begin{array}{rcl} -2x_1 \phantom{{}-2x_2} + x_3 \phantom{{}+2x_4} &=& 0 \quad \cdot(-2) \\ -6x_1 \phantom{{}-2x_2+x_3} + 2x_4 &=& 0 \quad | : 2 \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 &=& 0. \quad + \end{array}$$

Äquivalente Umformungen liefern

$$\begin{array}{rcl} -2x_1 \phantom{{}-2x_2} + x_3 \phantom{{}+x_4} &=& 0 \\ -3x_1 \phantom{{}-2x_2+x_3} + x_4 &=& 0 \quad \cdot(-1) \\ 3x_1 - 2x_2 \phantom{{}+x_3} + x_4 &=& 0 \quad + \end{array}$$

sowie desweiteren

$$\begin{array}{rcl} -2x_1 \phantom{{}-2x_2} + x_3 \phantom{{}+x_4} &=& 0 \mid \cdot(-1) \\ -3x_1 \phantom{{}-2x_2+x_3} + x_4 &=& 0 \mid \cdot(-1) \\ 6x_1 - 2x_2 \phantom{{}+x_3+x_4} &=& 0 \mid : 2 \end{array}$$

und somit

$$\begin{array}{rcl} 3x_1 - x_2 &=& 0 \\ 2x_1 - x_3 &=& 0 \\ 3x_1 - x_4 &=& 0. \end{array}$$

Daraus ergibt sich als Lösungsmenge $\{(x_1, 3x_1, 2x_1, 3x_1) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 \in \mathbb{R}\}$. Es folgt die Reaktionsgleichung

$$C_2H_5OH + 3\,O_2 \rightleftharpoons 2\,CO_2 + 3\,H_2O,$$

wenn man $x_1 = 1 \in \mathbb{N}$ einsetzt. □

Aufgabe 2. Für welche $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ verläuft der Graph $\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$ der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die durch $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ für $x \in \mathbb{R}$ gegeben ist, durch die vier vorgegebenen Punkte

$$(x_1, y_1) = (-1, -1), \quad (x_2, y_2) = (0, 3), \quad (x_3, y_3) = (1, 5), \quad (x_4, y_4) = (2, 11)$$

hindurch? ⑥

Lösung. Die Koeffizienten $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ergeben sich jeweils als Lösung des linearen Gleichungssystems, welches man durch Einsetzen der Koordinaten der vier Punkte in die Gleichung der Funktion erhält: Man erhält somit

$$\begin{array}{rcrcrcrcrl} -a & + & b & - & c & + & d & = & -1 & \quad + \\ & & & & & & d & = & 3 & \quad \cdot(-1) \quad \cdot(-1) \quad \cdot(-1) \\ a & + & b & + & c & + & d & = & 5 & \quad + \\ 8a & + & 4b & + & 2c & + & d & = & 11. & \quad + \end{array}$$

Äquivalente Umformungen liefern

$$\begin{array}{rcrcrcrl} & & & & d & = & 3 & \\ -a & + & b & - & c & = & -4 & \quad + \\ a & + & b & + & c & = & 2 & \quad \cdot(-2) \\ 8a & + & 4b & + & 2c & = & 8 & \quad + \end{array}$$

sowie desweiteren

$$\begin{array}{rcrcrcrl} & & & & d & = & 3 & \\ & & 2b & & & = & -2 & \mid :2 \\ a & + & b & + & c & = & 2 & \\ 6a & + & 2b & & & = & 4 & \mid :2 \end{array} \qquad \text{und} \qquad \begin{array}{rcrcrcrl} & & & & d & = & 3 & \\ & & b & & & = & -1 & \quad \cdot(-1) \quad \cdot(-1) \\ a & + & b & + & c & = & 2 & \quad + \\ 3a & + & b & & & = & 2 & \quad + \end{array}$$

sowie schließlich

$$\begin{array}{rcrcrcrl} & & & & d & = & 3 & \\ & & b & & & = & -1 & \\ a & & & + & c & = & 3 & \quad + \\ 3a & & & & & = & 3 & \mid :3 \quad \cdot(-1) \end{array} \qquad \text{und} \qquad \begin{array}{rrrrcr} & & & d & = & 3 \\ & & c & & = & 2 \\ & b & & & = & -1 \\ a & & & & = & 1. \end{array}$$

Damit erhält man die gesuchten Koeffizienten als Lösung $(a, b, c, d) = (1, -1, 2, 3)$ des Gleichungssystems, und es gilt $f(x) = x^3 - x^2 + 2x + 3$ für $x \in \mathbb{R}$. $\square$

Aufgabe 3. Man finde jeweils Mittelpunkt $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ und Radius $r > 0$ jeder Kugeloberfläche

$$\left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2 = r^2\right\},$$

welche durch die vier verschiedenen Punkte

$$x = (4, 0, 30), \quad y = (24, -12, -36), \quad z = (40, 12, 12), \quad \xi = (-12, -24, -18)$$

hindurchgeht! Welche dieser Kugeln hat den kleinsten Radius? ⑧

Lösung. Man versucht, die Koordinaten a_1, a_2, a_3 des Mittelpunkts und den Radius r aus den vier Gleichungen zu bestimmen, die durch Einsetzen der Koordinaten der vorgegebenen Punkte in die Gleichung der Kugeloberfläche entstehen: Man erhält nach Ausmultiplizieren und Zusammenfassen das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcll}
-8a_1 \phantom{{}+24a_2} - 60a_3 &=& r^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 - 916 & \cdot(-1) \quad \cdot(-1) \quad \cdot(-1) \\
-48a_1 + 24a_2 + 72a_3 &=& r^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 - 2016 & + \\
-80a_1 - 24a_2 - 24a_3 &=& r^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 - 1888 & + \\
24a_1 + 48a_2 + 36a_3 &=& r^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 - 1044. & +
\end{array}$$

Äquivalente Umformungen führen zunächst auf

$$\begin{array}{rcll}
-8a_1 \phantom{{}+24a_2} - 60a_3 &=& r^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 - 916 & \\
-40a_1 + 24a_2 + 132a_3 &=& -1100 & \mid :4 \\
-72a_1 - 24a_2 + 36a_3 &=& -972 & \mid :12 \\
32a_1 + 48a_2 + 96a_3 &=& -128 & \mid :16
\end{array}$$

und somit zum folgenden linearen Teilsystem der letzten drei Gleichungen

$$\begin{array}{rcll}
-10a_1 + 6a_2 + 33a_3 &=& -275 & + \\
-6a_1 - 2a_2 + 3a_3 &=& -81 & + \\
2a_1 + 3a_2 + 6a_3 &=& -8. & \cdot 3 \quad \cdot 5
\end{array}$$

Weitere elementare Umformungen liefern

$$\begin{array}{rcll}
21a_2 + 63a_3 &=& -315 \mid :21 & + \\
7a_2 + 21a_3 &=& -105 \mid :7 & \cdot(-1) \quad \cdot(-2) \\
2a_1 + 3a_2 + 6a_3 &=& -8 & +
\end{array}$$

und somit schließlich

$$\begin{array}{rcl}
a_2 + 3a_3 &=& -15 \\
2a_1 + a_2 \phantom{{}+3a_3} &=& 22.
\end{array}$$

Da $a_2 = -6\lambda \in \mathbb{R}$ ein frei wählbarer Parameter ist, ergibt sich daraus die Menge $\bigl\{(3\lambda + 11, -6\lambda, 2\lambda - 5) \in \mathbb{R}^3 \mid \lambda \in \mathbb{R}\bigr\}$ aller gesuchten Kugelmittelpunkte. Der zum Mittelpunkt $a(\lambda) = (3\lambda+11, -6\lambda, 2\lambda-5)$ für $\lambda \in \mathbb{R}$ gehörende Kugelradius $r(\lambda) > 0$ berechnet sich (zum Beispiel) aus der Gleichung für den Punkt $x = (4, 0, 30)$ auf der Kugeloberfläche: Es gilt

$$\begin{aligned} r^2(\lambda) &= (x_1 - a_1(\lambda))^2 + (x_2 - a_2(\lambda))^2 + (x_3 - a_3(\lambda))^2 \\ &= (3\lambda + 7)^2 + (6\lambda)^2 + (2\lambda - 35)^2 \\ &= 49\lambda^2 - 98\lambda + 1274 = 49\bigl((\lambda - 1)^2 + 25\bigr) \end{aligned}$$

und somit $r(\lambda) = 7\sqrt{(\lambda - 1)^2 + 25}$ für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$. Da der Radikand offenbar für $\lambda = 1$ seinen kleinsten Wert annimmt und die Wurzelfunktion streng monoton wächst, ist $r(1) = 35$ der kleinste Radius aller Kugeln, deren Oberfläche durch die gegebenen Punkte verläuft. Diese Kugel hat den Mittelpunkt $a(1) = (14, -6, -3)$.

Bemerkung. Alle vier Punkte liegen auf einer *ebenen Kreislinie* im Raume: In der Tat gilt $x - \xi = z - y = (16, 24, 48)$ sowie $x - z = \xi - y = (-36, -12, 18)$, das heißt, die vier Punkte sind die Eckpunkte eines *ebenen Rechtecks*, dessen Diagonalen sich im Mittelpunkt $\frac{1}{4}(x + y + z + \xi) = (14, -6, -3)$ schneiden. $\square$

Aufgabe 4. Man untersuche, ob es eine Kugeloberfläche

$$\left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2 = r^2\right\}$$

um einen Mittelpunkt $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ mit einem Radius $r > 0$ gibt, die jeweils durch die vier verschiedenen Punkte

(1) $\quad x = (4, 3, -3), \quad y = (4, 10, 4), \quad z = (4, 6, 6), \quad \xi = (29, 6, 1),$

(2) $\quad x = (1, 0, 0), \quad y = (0, -3, 0), \quad z = (0, 0, 2), \quad \xi = (2, 6, 2),$

hindurchgeht!

Lösung. Man versucht, die Koordinaten a_1, a_2, a_3 des Mittelpunkts und den Radius r aus den vier Gleichungen zu bestimmen, die durch Einsetzen der Koordinaten der vorgegebenen Punkte in die Gleichung der Kugeloberfläche entstehen:

1. Für die Punkte $x = (4, 3, -3)$, $y = (4, 10, 4)$, $z = (4, 6, 6)$ und $\xi = (29, 6, 1)$ erhält man nach Ausmultiplizieren und Zusammenfassen das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcll}
-8a_1 & - & 6a_2 & + & 6a_3 & = & r^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 - 34 & \cdot(-1) \quad \cdot(-1) \quad \cdot(-1) \\
-8a_1 & - & 20a_2 & - & 8a_3 & = & r^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 - 132 & + \\
-8a_1 & - & 12a_2 & - & 12a_3 & = & r^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 - 88 & + \\
-58a_1 & - & 12a_2 & - & 2a_3 & = & r^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 - 878. & +
\end{array}$$

Äquivalente Umformungen führen zunächst auf

$$\begin{array}{rcrcrcll}
-8a_1 & - & 6a_2 & + & 6a_3 & = & r^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 - 34 & \\
 & & -14a_2 & - & 14a_3 & = & -98 & \mid :(-14) \\
 & & -6a_2 & - & 18a_3 & = & -54 & \mid :(-6) \\
-50a_1 & - & 6a_2 & - & 8a_3 & = & -844 & \mid \cdot(-1)
\end{array}$$

und somit zum folgenden linearen Teilsystem der letzten drei Gleichungen

$$\begin{array}{rcrcrcrl}
 & & a_2 & + & a_3 & = & 7 & + \\
 & & a_2 & + & 3a_3 & = & 9 & \cdot(-1) \quad \cdot(-6) \\
50a_1 & + & 6a_2 & + & 8a_3 & = & 844. & +
\end{array}$$

Elementare Umformungen liefern

$$\begin{array}{rcrcrcrl}
 & & & & -2a_3 & = & -2 & \mid :(-2) \quad \cdot(-3) \\
 & & a_2 & + & 3a_3 & = & 9 & + \\
50a_1 & & & - & 10a_3 & = & 790 & \mid : 10 \quad +
\end{array}
\qquad \text{und} \qquad
\begin{array}{rcrcrl}
 & & & & a_3 = 1 & \\
 & & a_2 & & = 6 & \\
5a_1 & & & & = 80. & \mid : 5
\end{array}$$

Daraus ergibt sich die Lösung $(a_1, a_2, a_3) = (16, 6, 1)$, welche der Mittelpunkt der gesuchten Kugel ist. Ihr Radius $r = 13$ berechnet sich aus der Gleichung für den Punkt $\xi = (29, 6, 1)$ auf der Kugeloberfläche.

2. Für die Punkte $x = (1,0,0)$, $y = (0,-3,0)$, $z = (0,0,2)$ sowie $\xi = (2,6,2)$ erhält man nach Ausmultiplizieren und Zusammenfassen das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
-2a_1 \qquad\qquad\qquad &= r^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 - 1 \\
6a_2 \qquad\quad &= r^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 - 9 \\
-4a_3 &= r^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 - 4 \\
-4a_1 - 12a_2 - 4a_3 &= r^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 - 44. \quad \cdot(-1) \quad \cdot(-1) \quad \cdot(-1)
\end{aligned}$$

Äquivalente Umformungen liefern zunächst

$$\begin{aligned}
2a_1 + 12a_2 + 4a_3 &= 43 & &\cdot(-1) \\
4a_1 + 18a_2 + 4a_3 &= 35 & &+ \\
4a_1 + 12a_2 \qquad\quad &= 40 & &\mid :2 \\
-4a_1 - 12a_2 - 4a_3 &= r^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 - 44
\end{aligned}$$

und damit folgendes lineare Teilsystem der ersten drei Gleichungen

$$\begin{aligned}
2a_1 + 12a_2 + 4a_3 &= 43 \\
2a_1 + 6a_2 \qquad\quad &= -8 \\
2a_1 + 6a_2 \qquad\quad &= 20,
\end{aligned}$$

welches *keine* Lösung besitzt, da sich die zweite und die dritte Gleichung widersprechen. Es gibt *keine* Kugeloberfläche, die durch die vier gegebenenen Punkte läuft!

Bemerkung. Alle vier Punkte liegen in einer *Ebene*, aber *nicht* auf einem Kreis: Der Punkt $\xi = (2,6,2)$ gehört zu der Ebene $\left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 1\right\}$, welche durch die Punkte $x = (1,0,0)$, $y = (0,-3,0)$ und $z = (0,0,2)$ verläuft. $\square$

Aufgabe 5. Man bestimme die Menge aller reellen stöchiometrischen Koeffizienten für die chemische Reaktion

$$x_1 \cdot \mathrm{CO_2} + x_2 \cdot \mathrm{H_2} \rightleftharpoons x_3 \cdot \mathrm{CH_4} + x_4 \cdot \mathrm{H_2O}$$

und wähle eine Lösung mit ganzzahligen positiven Koeffizienten aus!

Lösung. Für jedes Element C, H und O wird eine Bilanzgleichung aufgestellt. Daraus ergibt sich ein homogenes System von drei Gleichungen für vier Unbekannte:

$$\begin{array}{rrrrl}
-x_1 & & +\ x_3 & & = 0 \quad \mid \cdot 2 \quad \cdot(-1) \\
 & -2x_2 & +\ 4x_3 & +\ 2x_4 & = 0 \\
-2x_1 & & & +\ x_4 & = 0. \quad \longleftarrow +
\end{array}$$

Äquivalente Umformungen liefern

$$\begin{array}{rrrrl}
-2x_1 & & +\ 2x_3 & & = 0 \quad \longleftarrow + \\
 & -2x_2 & +\ 4x_3 & +\ 2x_4 & = 0 \quad \longleftarrow + \\
 & & -2x_3 & +\ x_4 & = 0 \quad \cdot 2
\end{array}$$

sowie desweiteren

$$\begin{array}{rrrrl}
-2x_1 & & & +\ x_4 & = 0 \\
 & -2x_2 & & +\ 4x_4 & = 0 \\
 & & -2x_3 & +\ x_4 & = 0.
\end{array}$$

Daraus ergibt sich als Lösungsmenge $\left\{\left(\frac{1}{2}x_4, 2x_4, \frac{1}{2}x_4, x_4\right) \in \mathbb{R}^4 \mid x_4 \in \mathbb{R}\right\}$. Es folgt die Reaktionsgleichung

$$\mathrm{CO_2} + 4\,\mathrm{H_2} \rightleftharpoons \mathrm{CH_4} + 2\,\mathrm{H_2O},$$

wenn man $x_4 = 2 \in \mathbb{N}$ einsetzt. $\square$

Aufgabe 6. Man untersuche, ob es eine Kreislinie

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 = r^2\}$$

um einen Mittelpunkt $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ mit einem Radius $r > 0$ gibt, welche jeweils durch die drei verschiedenen Punkte

(1) $\quad (x_1, x_2) = (3, -3), \quad (y_1, y_2) = (10, 4), \quad (z_1, z_2) = (6, 6),$

(2) $\quad (x_1, x_2) = (1, -1), \quad (y_1, y_2) = (5, 7), \quad (z_1, z_2) = (2, 1),$

hindurchgeht!

Lösung. Man versucht zunächst, die kartesischen Koordinaten $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ eines Mittelpunktes $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ und einen Radius $r > 0$ aus den drei Gleichungen zu bestimmen, die aus der Kreisgleichung durch Einsetzen der Koordinaten der vorgegebenen Punkte (x_1, x_2), (y_1, y_2), $(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$ entstehen:

1. Für die Punkte $(x_1, x_2) = (3, -3)$, $(y_1, y_2) = (10, 4)$ und $(z_1, z_2) = (6, 6)$ ergibt sich nach Ausmultiplizieren und Zusammenfassen das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -6a_1 + 6a_2 &= r^2 - a_1^2 - a_2^2 - 18 & \cdot(-1) \quad \cdot(-1) \\ -20a_1 - 8a_2 &= r^2 - a_1^2 - a_2^2 - 116 & + \\ -12a_1 - 12a_2 &= r^2 - a_1^2 - a_2^2 - 72. & + \end{aligned}$$

Äquivalente Umformungen liefern zunächst

$$\begin{aligned} -6a_1 + 6a_2 &= r^2 - a_1^2 - a_2^2 - 18 \\ -14a_1 - 14a_2 &= -98 & \mid : (-7) \\ -6a_1 - 18a_2 &= -54 & \mid : (-6) \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} -6a_1 + 6a_2 &= r^2 - a_1^2 - a_2^2 - 18 \\ a_1 + a_2 &= 7 & \cdot(-1) \\ a_1 + 3a_2 &= 9. & + \end{aligned}$$

Für das Teilsystem aus der zweiten und dritten Gleichung ergibt sich

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= 7 & + \\ 2a_2 &= 2. \mid : 2 & \cdot(-1) \end{aligned}$$

Die Lösung $a = (a_1, a_2) = (6, 1)$ stellt den Mittelpunkt des gesuchten Kreises dar. Sein Radius $r = 5$ ergibt sich aus der Kreisgleichung für den Punkt $(z_1, z_2) = (6, 6)$.

2. Für die Punkte $(x_1, x_2) = (1, -1)$, $(y_1, y_2) = (5, 7)$ und $(z_1, z_2) = (2, 1)$ erhält man nach Ausmultiplizieren und Zusammenfassen das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
-2a_1 + 2a_2 &= r^2 - a_1^2 - a_2^2 - 2 && \cdot(-1) \quad \cdot(-1)\\
-10a_1 - 14a_2 &= r^2 - a_1^2 - a_2^2 - 74 && +\\
-4a_1 - 2a_2 &= r^2 - a_1^2 - a_2^2 - 5. && \quad\ \ +
\end{aligned}$$

Äquivalente Umformungen führen auf

$$\begin{aligned}
-2a_1 + 2a_2 &= r^2 - a_1^2 - a_2^2 - 2\\
-8a_1 - 16a_2 &= -72 \qquad\qquad | : 4\\
-2a_1 - 4a_2 &= -3
\end{aligned}$$

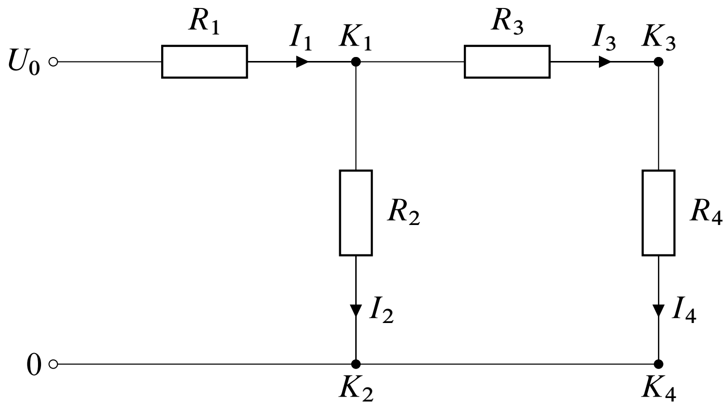
und schließlich

$$\begin{aligned}
-2a_1 + 2a_2 &= r^2 - a_1^2 - a_2^2 - 2\\
-2a_1 - 4a_2 &= -36\\
-2a_1 - 4a_2 &= -3.
\end{aligned}$$

Schon das Teilsystem der beiden letzten Gleichungen hat *keine* Lösung $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$. Es gibt somit *keine* Kreislinie, die durch die drei vorgegebenen Punkte hindurchgeht.

Bemerkung. Sei $\{v + \lambda w \in \mathbb{R}^2 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ die *Gerade* mit $w = (y_1, y_2) - (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$ und $v = (z_1, z_2)$, welche durch die Punkte $(z_1, z_2) = (2, 1)$ und $(y_1, y_2) = (5, 7)$ verläuft. Da für $\lambda = -\frac{1}{3}$ die Beziehung $(x_1, x_2) = (1, -1) = (2, 1) + \lambda(3, 6) = v + \lambda w$ gilt, liegt auch der Punkt (x_1, x_2) auf dieser Geraden. $\square$

Aufgabe 7. Ein elektrisches Netzwerk mit vier Ohmschen Widerständen $R_1 = 15\,\Omega$, $R_2 = 30\,\Omega$, $R_3 = 10\,\Omega$ und $R_4 = 20\,\Omega$ wird an eine Gleichspannungsquelle mit $U_0 = 60\,\mathrm{V}$ angeschlossen:



Welche Ströme I_1, I_2, I_3 und I_4 fließen durch diese Widerstände?

Lösung. 1. Die Spannungsdifferenz U_0 verteilt sich in der ersten Masche des Netzwerks über die Knotenpunkte K_1 und K_2 gemäß des Ohmschen Gesetzes

$$U_0 = R_1 I_1 + R_2 I_2.$$

Die Spannungsdifferenz $U_2 = R_2 I_2$ zwischen den Knotenpunkten K_1 und K_2 verteilt sich in der zweiten Masche des Netzwerks über die Knotenpunkte K_3 und K_4 gemäß des Ohmschen Gesetzes

$$R_2 I_2 = R_3 I_3 + R_4 I_4.$$

Desweiteren stehen jeweils die ein- und ausfließenden Ströme in den Knoten K_1 und K_3 im Gleichgewicht, das heißt, es gilt

$$I_1 = I_2 + I_3 \quad \text{sowie} \quad I_3 = I_4.$$

2. Somit erhält man für die vier unbekannten Ströme I_1, I_2, I_3 und I_4 folgendes System von vier Gleichungen

$$\begin{array}{rcrcrcrcl}
R_1 I_1 & + & R_2 I_2 & & & & & = & U_0 \\
-I_1 & + & I_2 & + & I_3 & & & = & 0 \\
 & & -R_2 I_2 & + & R_3 I_3 & + & R_4 I_4 & = & 0 \\
 & & & & -I_3 & + & I_4 & = & 0.
\end{array}$$

Setzt man die konkreten Zahlenwerte ein, so folgt daraus

$$\begin{array}{rcrcrcrcll}
15 I_1 & + & 30 I_2 & & & & & = & 60\,\mathrm{A} & \mid \; : 15 \\
-I_1 & + & I_2 & + & I_3 & & & = & 0 & \quad + \\
 & & -30 I_2 & + & 10 I_3 & + & 20 I_4 & = & 0 & \quad + \\
 & & & & -I_3 & + & I_4 & = & 0. & \quad \cdot(-20)
\end{array}$$

Äquivalente Umformungen liefern zunächst

$$\begin{aligned}
I_1 + 2I_2 \qquad\qquad &= 4\,\mathrm{A} \\
3I_2 + I_3 \qquad &= 4\,\mathrm{A} \\
-30I_2 + 30I_3 \qquad &= 0 \quad |\ :30 \quad \cdot(-1) \\
-I_3 + I_4 &= 0
\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}
I_1 + 2I_2 \qquad\qquad &= 4\,\mathrm{A} \\
4I_2 \qquad\qquad &= 4\,\mathrm{A} \ |\ :4 \quad \cdot(-2) \\
-I_2 + I_3 \qquad &= 0 \\
-I_3 + I_4 &= 0
\end{aligned}$$

und schließlich

$$\begin{aligned}
I_1 \qquad\qquad &= 2\,\mathrm{A} \\
I_2 \qquad &= 1\,\mathrm{A} \\
I_3 \quad &= 1\,\mathrm{A} \\
-I_3 + I_4 &= 0.
\end{aligned}$$

Somit fließen die Ströme $I_1 = 2\,\mathrm{A}$, $I_2 = 1\,\mathrm{A}$, $I_3 = 1\,\mathrm{A}$ und $I_4 = 1\,\mathrm{A}$ durch die Widerstände des Netzwerks. $\square$

Aufgabe 8. Seien im Körper $\mathbb{K}_2 = \{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}$ Addition und Multiplikation vermöge

$$
\begin{array}{c|cc}
+ & \mathbb{0} & \mathbb{1} \\
\hline
\mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{1} \\
\mathbb{1} & \mathbb{1} & \mathbb{0}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c|cc}
\cdot & \mathbb{0} & \mathbb{1} \\
\hline
\mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\
\mathbb{1} & \mathbb{0} & \mathbb{1}
\end{array}
$$

erklärt sowie im Körper $\mathbb{K}_3 = \{\mathbb{0}, \mathbb{1}, \mathbb{2}\}$ Addition und Multiplikation gegeben durch

$$
\begin{array}{c|ccc}
+ & \mathbb{0} & \mathbb{1} & \mathbb{2} \\
\hline
\mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{1} & \mathbb{2} \\
\mathbb{1} & \mathbb{1} & \mathbb{2} & \mathbb{0} \\
\mathbb{2} & \mathbb{2} & \mathbb{0} & \mathbb{1}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c|ccc}
\cdot & \mathbb{0} & \mathbb{1} & \mathbb{2} \\
\hline
\mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\
\mathbb{1} & \mathbb{0} & \mathbb{1} & \mathbb{2} \\
\mathbb{2} & \mathbb{0} & \mathbb{2} & \mathbb{1}
\end{array}
$$

Man bestimme jeweils alle Lösungen $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{K}_2$ bzw. $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{K}_3$ des durch

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 \phantom{{}+x_3} &= \mathbb{0} \\
x_1 - x_2 + x_3 &= \mathbb{0} \\
x_1 + x_2 - x_3 &= \mathbb{0}
\end{aligned}
$$

gegebenen linearen homogenen Gleichungssystems!

Lösung. 1. Im Körper $\mathbb{K}_2$ ist das Gleichungssystem

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 \phantom{{}+x_3} &= \mathbb{0} \\
x_1 - x_2 + x_3 &= \mathbb{0} \\
x_1 + x_2 - x_3 &= \mathbb{0}
\end{aligned}
\qquad \text{äquivalent zu} \qquad
\begin{aligned}
x_1 + x_2 &= \mathbb{0} \\
x_3 &= \mathbb{0} \\
\mathbb{0} &= \mathbb{0},
\end{aligned}
$$

welches außer der trivialen Lösung $x_1 = \mathbb{0}$, $x_2 = \mathbb{0}$, $x_3 = \mathbb{0} \in \mathbb{K}_2$ auch noch die Lösung $x_1 = \mathbb{1}$, $x_2 = \mathbb{1}$, $x_3 = \mathbb{0} \in \mathbb{K}_2$ besitzt.

2. Im Körper $\mathbb{K}_3$ führen äquivalente Umformungen des Gleichungssystems

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 \phantom{{}+x_3} &= \mathbb{0} \\
x_1 - x_2 + x_3 &= \mathbb{0} \\
x_1 + x_2 - x_3 &= \mathbb{0}
\end{aligned}
\qquad \text{auf} \qquad
\begin{aligned}
x_1 + x_2 \phantom{{}+x_3} &= \mathbb{0} \\
\mathbb{2} \cdot x_1 \phantom{{}+x_2} + x_3 &= \mathbb{0} \\
\mathbb{2} \cdot x_1 \phantom{{}+x_2+x_3} &= \mathbb{0},
\end{aligned}
$$

welches somit nur die triviale Lösung $x_1 = \mathbb{0}$, $x_2 = \mathbb{0}$, $x_3 = \mathbb{0} \in \mathbb{K}_3$ hat. □