Übungsaufgaben 10

Extremwertprobleme

Aufgabe 1. Seien eine reelle Konstante $a > 0$ und die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2a^2(x_1^2 - x_2^2) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^2 \text{ gegeben.}$$

1. Man bestimme alle *kritischen Punkte* von f, das heißt, alle Punkte $x \in \mathbb{R}^2$, welche die notwendige Bedingung $Df(x) = 0$ eines Extrempunktes von f erfüllen!

2. Welcher dieser kritischen Punkte $x \in \mathbb{R}^2$ ist ein lokaler Maximumpunkt, ein lokaler Minimumpunkt bzw. ein Sattelpunkt von f? ⑥

Lösung. 1. Die Ableitung von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in $x \in \mathbb{R}^2$ hat die Gestalt

$$Df(x) = \big(4x_1(x_1^2 + x_2^2) - 4a^2x_1, 4x_2(x_1^2 + x_2^2) + 4a^2x_2\big) \in L(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}),$$

das heißt, es gilt genau dann $Df(x) = 0$, wenn $x \in \mathbb{R}^2$ Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1(x_1^2 + x_2^2 - a^2) &= 0 \\ x_2(x_1^2 + x_2^2 + a^2) &= 0 \end{aligned}$$

ist. Wegen $a > 0$ folgt aus der zweiten Gleichung $x_2 = 0$. Somit besitzt die erste Gleichung $x_1(x_1 - a)(x_1 + a) = 0$ drei Lösungen $x_1 \in \{-a, 0, a\}$. Man erhält somit die kritischen Punkte $x_\ominus = (-a, 0)$, $x_0 = (0, 0)$, $x_\oplus = (a, 0)$ von f.

2. Die zweite Ableitung von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in $x \in \mathbb{R}^2$ ist durch die Hesse-Matrix

$$D^2f(x) = \begin{pmatrix} 12x_1^2 + 4x_2^2 - 4a^2 & 8x_1x_2 \\ 8x_1x_2 & 4x_1^2 + 12x_2^2 + 4a^2 \end{pmatrix} \in L(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$$

von f gegeben, welche in den kritischen Punkten von f jeweils den Wert

$$D^2f(x_\ominus) = \begin{pmatrix} 8a^2 & 0 \\ 0 & 8a^2 \end{pmatrix}, \quad D^2f(x_0) = \begin{pmatrix} -4a^2 & 0 \\ 0 & 4a^2 \end{pmatrix}, \quad D^2f(x_\oplus) = \begin{pmatrix} 8a^2 & 0 \\ 0 & 8a^2 \end{pmatrix}$$

annimmt. Da die Matrizen $D^2f(x_\ominus)$ sowie $D^2f(x_\ominus)$ positiv definit und $D^2f(x_0)$ indefinit sind, handelt es sich bei $x_\ominus \in \mathbb{R}^2$ sowie $x_\oplus \in \mathbb{R}^2$ um lokale Minimumpunkte und bei $x_0 \in \mathbb{R}^2$ um einen Sattelpunkt von f. □

Aufgabe 2. Man finde jene Punkte $x \in K_1$ und $y \in K_2$ auf den beiden Kreislinien

$$K_1 = \{z \in \mathbb{R}^3 \mid z_1^2 + z_2^2 = 4, z_3 = 0\},$$
$$K_2 = \{z \in \mathbb{R}^3 \mid (z_1 - 3)^2 + z_3^2 = 4, z_2 = 0\},$$

welche den kleinsten bzw. größten Abstand $\|x - y\|$ voneinander haben! ⑧

Lösung. 1. Aufgrund der Nebenbedingungen gilt $x_3 = 0$, $y_2 = 0$. Es genügen somit die vier Koordinaten x_1, x_2, y_1, $y_3 \in \mathbb{R}$ zur Beschreibung des Extremwertproblems:

Die Zielfunktion $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ wird durch das Quadrat des Abstands

$$f(x_1, x_2, y_1, y_3) = (x_1 - y_1)^2 + x_2^2 + y_3^2$$

der beiden Punkte x, $y \in \mathbb{R}^3$ mit $x_3 = 0$ und $y_2 = 0$ definiert. Diejenige Abbildung $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, welche die Menge $M = \{(x_1, x_2, y_1, y_3) \in \mathbb{R}^4 \mid g(x_1, x_2, y_1, y_3) = 0\}$ der Nebenbedingungen darstellt, wird durch

$$g(x_1, x_2, y_1, y_3) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 4 \\ (y_1 - 3)^2 + y_3^2 - 4 \end{pmatrix} \quad \text{für } x_1, x_2, y_1, y_3 \in \mathbb{R} \text{ gegeben.}$$

2.1. Für die Ableitungen von f und g in $(x_1, x_2, y_1, y_3) \in \mathbb{R}^4$ ergibt sich daraus

$$Df(x_1, x_2, y_1, y_3) = \big(2(x_1 - y_1), 2x_2, 2(y_1 - x_1), 2y_3\big) \in L(\mathbb{R}^4; \mathbb{R})$$

sowie

$$Dg(x_1, x_2, y_1, y_3) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2(y_1 - 3) & 2y_3 \end{pmatrix} \in L(\mathbb{R}^4; \mathbb{R}^2).$$

Für jedes $(x_1, x_2, y_1, y_3) \in M$ ist $Dg(x_1, x_2, y_1, y_3) \in L(\mathbb{R}^4; \mathbb{R}^2)$ somit surjektiv.

2.2. Die notwendige Bedingung

$$Df(x_1, x_2, y_1, y_3) - (\lambda_1, \lambda_2) Dg(x_1, x_2, y_1, y_3) = 0$$

für die Existenz von Extrempunkten $(x_1, x_2, y_1, y_3) \in M$ führt auf sechs Gleichungen

$$\begin{array}{llcr}
(1) & x_1 - y_1 - \lambda_1 x_1 = 0 & & (1 - \lambda_1) x_1 = y_1 \\
(2) & x_2 - \lambda_1 x_2 = 0 & & (1 - \lambda_1) x_2 = 0 \\
(3) & y_1 - x_1 - \lambda_2 (y_1 - 3) = 0 & \text{und somit} & (1 - \lambda_2) y_1 = x_1 - 3\lambda_2 \\
(4) & y_3 - \lambda_2 y_3 = 0 & & (1 - \lambda_2) y_3 = 0 \\
(5) & x_1^2 + x_2^2 = 4 & & x_1^2 + x_2^2 = 4 \\
(6) & (y_1 - 3)^2 + y_3^2 = 4 & & (y_1 - 3)^2 + y_3^2 = 4
\end{array}$$

mit den Unbekannten x_1, x_2, y_1, y_3, λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ inklusive Lagrange-Multiplikatoren.

2.3. Zur Lösung dieses Gleichungssystems kann man mit der Auswertung der beiden Gleichungen (2) und (4) beginnen: Angenommen, es würde $\lambda_1 = 1$ gelten. Dann bekäme man $y_1 = 0$ aus Gleichung (1), was im Widerspruch zu Gleichung (6) stünde. Somit gilt $\lambda_1 \neq 1$, also $x_2 = 0$ aufgrund von Gleichung (2). Angenommen, man hätte $\lambda_2 = 1$. Daraus ergäbe sich $x_1 = 3$ vermöge Gleichung (3) im Widerspruch zu Gleichung (5). Damit ist $\lambda_2 \neq 1$, und es folgt $y_3 = 0$ aus Gleichung (4).

Wegen $x_2 = 0$ und $y_3 = 0$ liefern die Gleichungen (5) und (6) alternativ $x_1 = 2$ oder $x_1 = -2$ sowie $y_1 = 1$ oder $y_1 = 5$. Bestimmt man jeweils die Lagrange-Multiplikatoren $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ aus den Gleichungen (1) und (3), so ergeben sich die folgenden vier kritischen Punkte

$$\begin{aligned}
(x_1, x_2, y_1, y_3, \lambda_1, \lambda_2) &= \big(2, 0, 1, 0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\big),\\
(x_1, x_2, y_1, y_3, \lambda_1, \lambda_2) &= \big(-2, 0, 1, 0, \tfrac{3}{2}, -\tfrac{3}{2}\big),\\
(x_1, x_2, y_1, y_3, \lambda_1, \lambda_2) &= \big(2, 0, 5, 0, -\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}\big),\\
(x_1, x_2, y_1, y_3, \lambda_1, \lambda_2) &= \big(-2, 0, 5, 0, \tfrac{7}{2}, \tfrac{7}{2}\big).
\end{aligned}$$

3.1. Um zu überprüfen, welche dieser Punkte die hinreichenden Bedingungen für Extrempunkte erfüllen, werden die zweiten Ableitungen von f und g betrachtet. Die Abbildung $D^2 f(x_1, 0, y_1, 0) - (\lambda_1, \lambda_2) D^2 g(x_1, 0, y_1, 0) \in L(\mathbb{R}^4; \mathbb{R}^4)$ hat die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ -2 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2\lambda_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2\lambda_1 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 2-2\lambda_1 & 0 & 0\\ -2 & 0 & 2-2\lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2-2\lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Der Tangentialraum an M ist in jedem kritischen Punkt $(x_1, 0, y_1, 0)$ derselbe Teilraum $U = \big\{\xi \in \mathbb{R}^4 \mid \xi_1 = \xi_3 = 0\big\}$, denn für $\xi \in \mathbb{R}^4$ folgt aus

$$Dg(x_1, 0, y_1, 0)(\xi) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2(y_1 - 3) & 0 \end{pmatrix} \xi = 0 \ \text{ stets } \ \xi_1 = \xi_3 = 0.$$

Somit ergibt sich für die kritischen Punkte $(x_1, 0, y_1, 0, \lambda_1, \lambda_2)$ und alle $\xi \in U$ stets

$$\big(D^2 f(x_1, 0, y_1, 0) - (\lambda_1, \lambda_2) D^2 g(x_1, 0, y_1, 0)\big)(\xi, \xi) = 2(1-\lambda_1)\xi_2^2 + 2(1-\lambda_2)\xi_4^2.$$

3.2. Damit hat die Funktion f unter der Nebenbedingung $(x_1, x_2, y_1, y_3) \in M$ einen Minimumpunkt $(2, 0, 1, 0) \in M$ wegen $(\lambda_1, \lambda_2) = \big(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\big)$, einen Sattelpunkt $(-2, 0, 1, 0) \in M$ wegen $(\lambda_1, \lambda_2) = \big(\tfrac{3}{2}, -\tfrac{3}{2}\big)$, einen Sattelpunkt $(2, 0, 5, 0) \in M$ wegen $(\lambda_1, \lambda_2) = \big(-\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}\big)$ sowie einen Maximumpunkt $(-2, 0, 5, 0) \in M$ wegen $(\lambda_1, \lambda_2) = \big(\tfrac{7}{2}, \tfrac{7}{2}\big)$. Folglich wird der kürzeste Abstand der Kreislinien K_1 und K_2 zwischen den Punkten $(2, 0, 0) \in K_1$ und $(1, 0, 0) \in K_2$ realisiert, während die größte Entfernung der Kreislinien zwischen den Punkten $(-2, 0, 0) \in K_1$ und $(5, 0, 0) \in K_2$ angenommen wird. $\square$

Aufgabe 3. Sei $a \in \mathbb{R}$ eine vorgegebene positive Kantenlänge. Unter allen Quadern mit positiven Kantenlängen $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ und gegebenem Rauminhalt $R = a^3$ finde man denjenigen, welcher den kleinsten Oberflächeninhalt besitzt! 6

Lösung. 1. Auf der offenen Menge $X = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1, x_2, x_3 > 0\}$ der zulässigen Kantenlängen des Quaders werden sein Oberflächeninhalt $F : X \to \mathbb{R}$ und jene Funktion $G : X \to \mathbb{R}$, welche die Menge $M = \{x \in X \mid x_1x_2x_3 = a^3\}$ der Nebenbedingung des vorgeschriebenen Rauminhalts darstellen soll, durch

$$F(x) = 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_1 \quad \text{und} \quad G(x) = x_1x_2x_3 - a^3 \quad \text{für } x \in X \text{ definiert.}$$

Für die partiellen Ableitungen von F und G in $x \in X$ erhält man

$$\begin{aligned} D_1F(x) &= 2x_2 + 2x_3, & D_1G(x) &= x_2x_3, \\ D_2F(x) &= 2x_1 + 2x_3, & D_2G(x) &= x_1x_3, \\ D_3F(x) &= 2x_1 + 2x_2, & D_3G(x) &= x_1x_2. \end{aligned}$$

2. Die notwendige Bedingung $DF(x) - \lambda DG(x) = 0$ für die Existenz von lokalen Extrempunkten $x \in M$ führt auf vier Gleichungen

$$\begin{array}{rcll} 2x_2 + 2x_3 - \lambda x_2x_3 &=& 0 & \mid \cdot\, x_1 \quad \cdot(-1) \quad \cdot(-1) \\ 2x_1 + 2x_3 - \lambda x_1x_3 &=& 0 & \mid \cdot\, x_2 \quad + \\ 2x_1 + 2x_2 - \lambda x_1x_2 &=& 0 & \mid \cdot\, x_3 \quad\quad\quad + \\ x_1x_2x_3 &=& a^3 & \end{array}$$

für die vier Unbekannten $x \in \mathbb{R}^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$ einschließlich Lagrange-Multiplikator. Äquivalente Umformungen liefern $2(x_2 - x_1)x_3 = 0$ und $2(x_3 - x_1)x_2 = 0$, woraus wegen $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_3 > 0$ sofort $x_1 = x_2 = x_3 = a$ und $\lambda a = 4$ folgt.

3. Um nachzuprüfen, daß für diesen kritischen Punkt auch die hinreichenden Bedinungungen für einen lokalen Minimumpunkt erfüllt sind, werden die zweiten Ableitungen von F und G betrachtet: Für $x_1 = x_2 = x_3 = a$ und $\lambda a = 4$ erhält man

$$D^2F(x) - \lambda D^2G(x) = \begin{pmatrix} 0 & 2 - \lambda x_3 & 2 - \lambda x_2 \\ 2 - \lambda x_3 & 0 & 2 - \lambda x_1 \\ 2 - \lambda x_2 & 2 - \lambda x_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \in L(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3).$$

Der Tangentialraum an die Untermannigfaltigkeit M im kritischen Punkt $x \in M$ ist

$$U = \{\xi \in \mathbb{R}^3 \mid DG(x)(\xi) = 0\} = \{\xi \in \mathbb{R}^3 \mid \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0\}.$$

Somit ist die für $\xi, \eta \in U$ durch

$$\Phi(\xi, \eta) = \big(D^2F(x) - \lambda D^2G(x)\big)(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^{3} 2\xi_k^2 - \sum_{k=1}^{3}\sum_{\ell=1}^{3} 2\xi_k\eta_\ell = 2\|\xi\|^2$$

definierte symmetrische Bilinearform $\Phi : U \times U \to \mathbb{R}$ positiv definit. Damit hat der Oberflächeninhalt $F : X \to \mathbb{R}$ des Quaders unter der Nebenbedingung $x \in M$ ein lokales Minimum für die Kantenlängen $x_1 = x_2 = x_3 = a$. □

Aufgabe 4. Betrachtet werde ein *abgeschlossenes* System mit vorgegebener mittlerer Teilchenzahl $N_0 \in \mathbb{R}$, $N_0 > 0$. Dabei befinden sich jeweils eine mittlere Anzahl von $N_k > 0$ Teilchen im Zustand Z_k, wobei die Indizes $k \in \{1, \ldots, n\}$ die möglichen Zustände beschreiben und der Zustandsraum des Systems durch die Menge

$$X = \big\{N \in \mathbb{R}^n \mid N_1, \ldots, N_n > 0\big\}$$

und die Nebenbedingung $M = \big\{N \in X \mid \sum_{k=1}^n N_k = N_0\big\}$ dargestellt wird. In welchem Zustand $N \in X$ nimmt die durch

$$F(N) = \sum_{k=1}^n N_k F_k + F_0 \sum_{k=1}^n N_k \ln \frac{N_k}{\sum_{\ell=1}^n N_\ell} \quad \text{für } N \in X$$

definierte *freie Energie* $F : X \to \mathbb{R}$ des Systems ein Minimum unter der Nebenbedingung $N \in M$ an, wenn $F_0 > 0$ eine Referenzenergie und $F_1, \ldots, F_n \in \mathbb{R}$ vorgegebene potentielle Energien sind?

Lösung. 1. Die Funktion $G : X \to \mathbb{R}$, welche die Menge $M = \big\{N \in X \mid G(N) = 0\big\}$ der Nebenbedingung darstellen soll, wird durch

$$G(N) = \sum_{k=1}^n N_k - N_0 \quad \text{für } N \in X \text{ definiert.}$$

Für die partiellen Ableitungen von F und G erhält man somit

$$D_k F(N) = F_k + F_0 \ln \frac{N_k}{\sum_{\ell=1}^n N_\ell} \quad \text{und} \quad D_k G(N) = 1$$

für alle $N \in X$ und $k \in \{1, \ldots, n\}$.

2. Die notwendige Bedingung $DF(N) - \Lambda DG(N) = 0$ für die Existenz von lokalen Extrempunkten $N \in X$ führt auf $n+1$ Gleichungen

$$\begin{aligned} F_k + F_0 \ln N_k - F_0 \ln \textstyle\sum_{\ell=1}^n N_\ell - \Lambda = 0 \quad \text{für } k \in \{1, \ldots, n\} \\ \textstyle\sum_{\ell=1}^n N_\ell = N_0 \end{aligned}$$

für die $n+1$ Unbekannten $N \in \mathbb{R}^n$, $\Lambda \in \mathbb{R}$ inklusive Lagrange-Multiplikator, also

$$\frac{N_k}{N_0} = \exp\left(\frac{\Lambda - F_k}{F_0}\right) \quad \text{für alle } k \in \{1, \ldots, n\}.$$

Daraus ergibt sich durch Summation über $k \in \{1, \ldots, n\}$ zunächst

$$1 = \sum_{k=1}^n \frac{N_k}{N_0} = \exp\left(\frac{\Lambda}{F_0}\right) \sum_{k=1}^n \exp\left(-\frac{F_k}{F_0}\right), \quad \text{also} \quad \exp\left(\frac{\Lambda}{F_0}\right) = \frac{1}{\sum_{\ell=1}^n \exp\left(-\frac{F_\ell}{F_0}\right)}$$

und somit für den kritischen Punkt $N \in X$ die Darstellung

$$N_k = \frac{N_0 \exp\left(-\frac{F_k}{F_0}\right)}{\sum_{\ell=1}^n \exp\left(-\frac{F_\ell}{F_0}\right)} \quad \text{für alle } k \in \{1, \ldots, n\} \quad \text{und} \quad \Lambda = F_0 \ln \frac{1}{\sum_{\ell=1}^n \exp\left(-\frac{F_\ell}{F_0}\right)}.$$

3. Um einzusehen, daß für diesen Punkt die hinreichenden Bedingungen für einen lokalen Extrempunkt erfüllt sind, werden die zweiten Ableitungen von F und G betrachtet: Im kritischen Punkt $N \in M$ erhält man die symmetrische Matrix

$$D^2F(N) - \Lambda D^2G(N) = \begin{pmatrix} \frac{F_0}{N_1} - \frac{F_0}{N_0} & -\frac{F_0}{N_0} & \cdots & -\frac{F_0}{N_0} \\ -\frac{F_0}{N_0} & \frac{F_0}{N_2} - \frac{F_0}{N_0} & \cdots & -\frac{F_0}{N_0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{F_0}{N_0} & -\frac{F_0}{N_0} & \cdots & \frac{F_0}{N_n} - \frac{F_0}{N_0} \end{pmatrix} \in L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n).$$

Der Tangentialraum an die affine Hyperebene M der Nebenbedingungen im kritischen Punkt $N \in M$ ist die lineare Hyperebene

$$U = \big\{\xi \in \mathbb{R}^n \mid DG(N)(\xi) = 0\big\} = \big\{\xi \in \mathbb{R}^n \mid \textstyle\sum_{k=1}^n \xi_k = 0\big\}$$

in $\mathbb{R}^n$. Wegen $F_0 > 0$ und $N \in X$ ist die für $\xi, \eta \in U$ durch

$$\Phi(\xi,\eta) = \big(D^2F(\rho) - \Lambda DG(\rho)\big)(\xi,\eta) = \sum_{k=1}^n \frac{F_0}{N_k}\,\xi_k\eta_k - \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n \frac{F_0}{N_0}\,\xi_k\eta_\ell = \sum_{k=1}^n \frac{F_0}{N_k}\,\xi_k\eta_k$$

definierte symmetrische Bilinearform $\Phi : U \times U \to \mathbb{R}$ positiv definit. Daher nimmt die freie Energie $F : X \to \mathbb{R}$ unter der Nebenbedingung $\sum_{k=1}^n N_k = N_0$ im durch

$$N_k = \frac{N_0 \exp\big(-\frac{F_k}{F_0}\big)}{\sum_{\ell=1}^n \exp\big(-\frac{F_\ell}{F_0}\big)} \quad \text{für alle } k \in \{1,\ldots,n\}$$

bestimmten Zustand $N \in M$ des Systems ein lokales Minimum an. □

Aufgabe 5. Welche Punkte $x \in \mathbb{R}^2$ der Ellipse $\{y \in \mathbb{R}^2 \mid y_1^2 + 2y_2^2 = 9\}$ haben vom Punkt $z = \left(\frac{1}{2}, 0\right) \in \mathbb{R}^2$ den größten bzw. den kleinsten Abstand?

Lösung. 1. Die Zielfunktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ wird durch das Quadrat des Abstands

$$f(x) = \|x - z\|^2 = \left(x_1 - \tfrac{1}{2}\right)^2 + x_2^2$$

des Punktes $x \in \mathbb{R}^2$ vom vorgegebenen Punkt $z = \left(\frac{1}{2}, 0\right) \in \mathbb{R}^2$ definiert. Die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, welche die Ellipse $M = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid g(x) = 0\}$ als Menge der Nebenbedingung darstellt, ist durch

$$g(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 9 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^2 \text{ gegeben.}$$

2.1. Die Ableitungen von f und g in $x \in \mathbb{R}^2$ haben die Gestalt

$$Df(x) = (2x_1 - 1, 2x_2) \in L(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}) \quad \text{sowie} \quad Dg(x) = (2x_1, 4x_2) \in L(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}),$$

wobei offensichtlich $Dg(x) \neq 0$ für jedes $x \in M$ gilt. Die notwendige Bedingung

$$Df(x) - \lambda Dg(x) = 0$$

für die Existenz von Extrempunkten $x \in M$ führt auf drei Gleichungen

$$\begin{aligned} 2x_1 - 1 - 2\lambda x_1 &= 0 & & & 2(1-\lambda)x_1 &= 1 \\ 2x_2 - 4\lambda x_2 &= 0 & &\text{und somit} & (1-2\lambda)x_2 &= 0 \\ x_1^2 + 2x_2^2 &= 9 & & & x_1^2 + 2x_2^2 &= 9 \end{aligned}$$

mit den drei Unbekannten $x_1, x_2, \lambda \in \mathbb{R}$ einschließlich des Lagrange-Multiplikators.

2.2. Im Falle $\lambda = \frac{1}{2}$ ergibt sich aus der ersten Gleichung $x_1 = 1$ und demzufolge $x_2 = 2$ oder $x_2 = -2$ aus der dritten Gleichung. Ist hingegen $\lambda \neq \frac{1}{2}$, so folgt aus der zweiten Gleichung $x_2 = 0$ und daher $x_1 = 3$ oder $x_1 = -3$ aus der dritten Gleichung. Die erste Gleichung liefert dann $\lambda = \frac{5}{6}$ bzw. $\lambda = \frac{7}{6}$ für den Lagrange-Multiplikator. Insgesamt ergeben sich vier kritische Punkte

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, \lambda) &= \left(1, 2, \tfrac{1}{2}\right), \\ (x_1, x_2, \lambda) &= \left(1, -2, \tfrac{1}{2}\right), \\ (x_1, x_2, \lambda) &= \left(3, 0, \tfrac{5}{6}\right), \\ (x_1, x_2, \lambda) &= \left(-3, 0, \tfrac{7}{6}\right). \end{aligned}$$

3.1. Um zu überprüfen, ob für diese kritischen Punkte die hinreichenden Bedingungen für Extrempunkte erfüllt sind, werden die zweiten Ableitungen von f und g betrachtet. Die Abbildung $D^2f(x) - \lambda D^2g(x) \in L(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)$ hat die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & 4\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2\lambda & 0 \\ 0 & 2-4\lambda \end{pmatrix}.$$

Der Tangentialraum an die Ellipse M im Punkt $x \in M$ ist wegen $x \neq 0$ die Gerade

$$U = \{\xi \in \mathbb{R}^2 \mid Dg(x)(\xi) = 0\} = \{\xi \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1\xi_1 + 4x_2\xi_2 = 0\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Im weiteren Verlauf soll die für $\xi, \eta \in U$ durch

$$\big(D^2f(x) - \lambda D^2g(x)\big)(\xi,\eta) = (2-2\lambda)\xi_1\eta_1 + (2-4\lambda)\xi_2\eta_2$$

definierte symmetrische Bilinearform in den kritischen Punkten untersucht werden:

3.2. Für die kritischen Punkte $(x,\lambda) = \big(1, 2, \frac{1}{2}\big)$ bzw. $(x,\lambda) = \big(1, -2, \frac{1}{2}\big)$ ergibt sich für alle $\xi \in U$ wegen $\xi_1^2 = x_1^2\xi_1^2 = 4x_2^2\xi_2^2 = 16\xi_2^2$ mit

$$\big(D^2f(x) - \lambda D^2g(x)\big)(\xi,\xi) = \xi_1^2 = \tfrac{1}{2}\xi_1^2 + 8\xi_2^2 \geq \tfrac{1}{2}\|\xi\|^2$$

die positive Definitheit der symmetrischen Bilinearform. Daher sind $(1,2) \in M$ und $(1,-2) \in M$ lokale Minimumpunkte von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ unter der Nebenbedingung $x \in M$. Beide Punkte $(1,2) \in M$ und $(1,-2) \in M$ der Ellipse realisieren den kleinsten Abstand zum Punkt $z = \big(\frac{1}{2}, 0\big)$.

3.3. Für den kritischen Punkt $(x,\lambda) = \big(3, 0, \frac{5}{6}\big)$ erhält man für jedes $\xi \in U$ wegen $9\xi_1^2 = x_1^2\xi_1^2 = 4x_2^2\xi_2^2 = 0$ mittels

$$\big(D^2f(x) - \lambda D^2g(x)\big)(\xi,\xi) = \tfrac{1}{3}\xi_1^2 - \tfrac{4}{3}\xi_2^2 = -\tfrac{4}{3}\|\xi\|^2$$

die negative Definitheit der symmetrischen Bilinearform. Damit ist $(3,0) \in M$ ein lokaler Maximalpunkt von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ unter der Nebenbedingung $x \in M$.

Für den kritischen Punkt $(x,\lambda) = \big(-3, 0, \frac{7}{6}\big)$ ergibt sich für jedes $\xi \in U$ vermöge

$$\big(D^2f(x) - \lambda D^2g(x)\big)(\xi,\xi) = -\tfrac{1}{3}\xi_1^2 - \tfrac{8}{3}\xi_2^2 \leq -\tfrac{1}{3}\|\xi\|^2$$

die negative Definitheit der symmetrischen Bilinearform. Damit ist $(-3,0) \in M$ ein lokaler Maximalpunkt von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ unter der Nebenbedingung $x \in M$. Da der Punkt $(-3,0) \in M$ einen größeren Abstand vom Punkt $z = \big(\frac{1}{2}, 0\big)$ als der Punkt $(3,0) \in M$ hat, liegt $(-3,0) \in M$ unter allen Punkten der Ellipse M am weitesten vom Punkt $z = \big(\frac{1}{2}, 0\big)$ entfernt. $\square$

Aufgabe 6. Sei der Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^2$ auf der Ellipse

$$\big\{(a\cos\varphi, b\sin\varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi \in [0, 2\pi]\big\}$$

mit den Halbachsen $a, b > 0$ beliebig vorgegeben. Man bestimme zwei weitere Punkte x_1 und $x_2 \in \mathbb{R}^2$ auf der Ellipse, für welche das Dreieck, das durch die drei Eckpunkte x_0, x_1 und x_2 gebildet wird, einen maximalen Flächeninhalt hat!

Lösung. 1. Sei der Punkt $x_0 = (a\cos\varphi_0, b\sin\varphi_0)$ auf der Ellipse durch die Wahl eines Winkels $\varphi_0 \in [0, 2\pi]$ festgelegt. Die Aufgabe besteht darin, zwei weitere Punkte

$$\begin{aligned} x_1 &= (a\cos(\varphi_0 + \theta_1), b\sin(\varphi_0 + \theta_1)) \\ x_2 &= (a\cos(\varphi_0 + \theta_1 + \theta_2), b\sin(\varphi_0 + \theta_1 + \theta_2)) \end{aligned}$$

auf der Ellipse durch die Variation der Winkel θ_1, $\theta_2 \in (0, 2\pi)$ mit $\theta_1 + \theta_2 \in (0, 2\pi)$ zu finden, für welche der Flächeninhalt des Dreiecks, das durch die drei Eckpunkte x_0, x_1 und $x_2 \in \mathbb{R}^2$ gebildet wird, einen maximalen Wert annimmt. Dies ist genau dann der Fall, wenn das Quadrat des Flächeninhalts des von den Vektoren $x_1 - x_0$, $x_2 - x_0 \in \mathbb{R}^2$ aufgespannten Parallelogramms maximal wird. Somit gelangt man zur Formulierung des Extremwertproblems für eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$, die mit Hilfe der Gram-Determinante

$$\begin{aligned} f(\theta_1, \theta_2) &= \begin{vmatrix} (x_1 - x_0|x_1 - x_0) & (x_1 - x_0|x_2 - x_0) \\ (x_2 - x_0|x_1 - x_0) & (x_2 - x_0|x_2 - x_0) \end{vmatrix} \\ &= a^2b^2 \begin{vmatrix} \cos(\varphi_0 + \theta_1) - \cos\varphi_0 & \cos(\varphi_0 + \theta_1 + \theta_2) - \cos\varphi_0 \\ \sin(\varphi_0 + \theta_1) - \sin\varphi_0 & \sin(\varphi_0 + \theta_1 + \theta_2) - \sin\varphi_0 \end{vmatrix}^2 \end{aligned}$$

auf der offenen Menge $X = \big\{(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \theta_1, \theta_2, \theta_1 + \theta_2 \in (0, 2\pi)\big\}$ zulässiger Winkel definiert wird.

2.1. Führt man Hilfswinkel $\varphi_1 = \varphi_0 + \theta_1$ und $\varphi_2 = \varphi_1 + \theta_2 = \varphi_0 + \theta_1 + \theta_2$ ein, so ergibt sich zunächst für die Determinante

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi_1 - \cos\varphi_0 & \cos\varphi_2 - \cos\varphi_0 \\ \sin\varphi_1 - \sin\varphi_0 & \sin\varphi_2 - \sin\varphi_0 \end{vmatrix}$$

nach dem Ausmultiplizieren der Wert

$$\sin\varphi_1\cos\varphi_0 - \sin\varphi_0\cos\varphi_1 + \sin\varphi_2\cos\varphi_1 - \sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_0\cos\varphi_2 - \sin\varphi_2\cos\varphi_0$$

und somit aufgrund der Additionstheoreme

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi_1 - \cos\varphi_0 & \cos\varphi_2 - \cos\varphi_0 \\ \sin\varphi_1 - \sin\varphi_0 & \sin\varphi_2 - \sin\varphi_0 \end{vmatrix} = \sin(\varphi_1 - \varphi_0) + \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + \sin(\varphi_0 - \varphi_2).$$

2.2. Durch die Rückkehr zur Darstellung in den Winkeln $(\theta_1, \theta_2) \in X$ folgt daraus

$$f(\theta_1, \theta_2) = a^2 b^2 (\sin\theta_1 + \sin\theta_2 - \sin(\theta_1 + \theta_2))^2$$

und deshalb für die partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} D_1 f(\theta_1, \theta_2) &= 2a^2 b^2 (\sin\theta_1 + \sin\theta_2 - \sin(\theta_1 + \theta_2))(\cos\theta_1 - \cos(\theta_1 + \theta_2)), \\ D_2 f(\theta_1, \theta_2) &= 2a^2 b^2 (\sin\theta_1 + \sin\theta_2 - \sin(\theta_1 + \theta_2))(\cos\theta_2 - \cos(\theta_1 + \theta_2)). \end{aligned}$$

Aufgrund der Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \sin\theta_1 + \sin\theta_2 - \sin(\theta_1 + \theta_2) &= 2\big(\cos\tfrac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2) - \cos\tfrac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)\big)\sin\tfrac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) \\ &= 4\sin\tfrac{1}{2}\theta_1 \sin\tfrac{1}{2}\theta_2 \sin\tfrac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \cos\theta_1 - \cos(\theta_1 + \theta_2) &= 2\sin\tfrac{1}{2}\theta_2 \sin\big(\theta_1 + \tfrac{1}{2}\theta_2\big), \\ \cos\theta_2 - \cos(\theta_1 + \theta_2) &= 2\sin\tfrac{1}{2}\theta_1 \sin\big(\theta_2 + \tfrac{1}{2}\theta_1\big) \end{aligned}$$

ergibt sich für die partiellen Ableitungen die Produktdarstellung

$$\begin{aligned} D_1 f(\theta_1, \theta_2) &= 16a^2 b^2 \sin\tfrac{1}{2}\theta_1 \sin\tfrac{1}{2}\theta_2 \sin\tfrac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) \sin\tfrac{1}{2}\theta_2 \sin\big(\theta_1 + \tfrac{1}{2}\theta_2\big), \\ D_2 f(\theta_1, \theta_2) &= 16a^2 b^2 \sin\tfrac{1}{2}\theta_1 \sin\tfrac{1}{2}\theta_2 \sin\tfrac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) \sin\tfrac{1}{2}\theta_1 \sin\big(\theta_2 + \tfrac{1}{2}\theta_1\big). \end{aligned}$$

2.3. Wegen $\theta_1, \theta_2, \theta_1 + \theta_2 \in (0, 2\pi)$ gilt $\sin\frac{1}{2}\theta_1 \neq 0$, $\sin\frac{1}{2}\theta_2 \neq 0$, $\sin\frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) \neq 0$. Somit liefern die notwendigen Bedingungen $D_1 f(\theta_1, \theta_2) = 0$ und $D_1 f(\theta_1, \theta_2) = 0$ für die Existenz von Extrempunkten $(\theta_1, \theta_2) \in X$ die beiden Beziehungen

$$\sin\big(\theta_1 + \tfrac{1}{2}\theta_2\big) = 0 \quad \text{und} \quad \sin\big(\theta_2 + \tfrac{1}{2}\theta_1\big) = 0.$$

Wegen $\theta_1, \theta_2, \theta_1 + \theta_2 \in (0, 2\pi)$ folgt daraus $\theta_1 + \frac{1}{2}\theta_2 = \pi$ und $\theta_2 + \frac{1}{2}\theta_1 = \pi$. Somit erhält man den (eindeutig bestimmten) kritischen Punkt $(\theta_1, \theta_2) = \big(\frac{2}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi\big) \in X$.

3. Um nachzuweisen, daß $\big(\frac{2}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi\big) \in X$ tatsächlich ein Maximumpunkt der Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ ist, wird die zweite Ableitung $D^2 f(\theta_1, \theta_2) \in L(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ berechnet:

$$\begin{aligned} D_1^2 f(\theta_1, \theta_2) &= 2a^2 b^2 (\cos\theta_1 - \cos(\theta_1 + \theta_2))(\cos\theta_1 - \cos(\theta_1 + \theta_2)) \\ &\quad - 2a^2 b^2 (\sin\theta_1 + \sin\theta_2 - \sin(\theta_1 + \theta_2))(\sin\theta_1 - \sin(\theta_1 + \theta_2)), \\ D_2 D_1 f(\theta_1, \theta_2) &= 2a^2 b^2 (\cos\theta_2 - \cos(\theta_1 + \theta_2))(\cos\theta_1 - \cos(\theta_1 + \theta_2)) \\ &\quad + 2a^2 b^2 (\sin\theta_1 + \sin\theta_2 - \sin(\theta_1 + \theta_2)) \sin(\theta_1 + \theta_2), \\ D_1 D_2 f(\theta_1, \theta_2) &= 2a^2 b^2 (\cos\theta_1 - \cos(\theta_1 + \theta_2))(\cos\theta_2 - \cos(\theta_1 + \theta_2)) \\ &\quad + 2a^2 b^2 (\sin\theta_1 + \sin\theta_2 - \sin(\theta_1 + \theta_2)) \sin(\theta_1 + \theta_2), \\ D_2^2 f(\theta_1, \theta_2) &= 2a^2 b^2 (\cos\theta_2 - \cos(\theta_1 + \theta_2))(\cos\theta_2 - \cos(\theta_1 + \theta_2)) \\ &\quad - 2a^2 b^2 (\sin\theta_1 + \sin\theta_2 - \sin(\theta_1 + \theta_2))(\sin\theta_2 - \sin(\theta_1 + \theta_2)). \end{aligned}$$

Für den kritischen Punkt $(\theta_1, \theta_2) = \left(\frac{2}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi\right)$ ergibt sich die Hesse-Matrix

$$D^2 f(\theta_1, \theta_2) = -\tfrac{9}{2} a^2 b^2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in L(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$$

mit den negativen Eigenwerten $-\frac{27}{2} a^2 b^2$ und $-\frac{9}{2} a^2 b^2$, und somit ist der Nachweis erbracht, daß $(\theta_1, \theta_2) = \left(\frac{2}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi\right)$ der Maximumpunkt von $f : X \to \mathbb{R}$ ist. Für einen durch den Winkel $\varphi_0 \in [0, 2\pi]$ beliebig festgelegten Punkt $x_0 = (a \cos \varphi_0, b \sin \varphi_0)$ auf der Ellipse stellen deshalb

$$\begin{aligned} x_1 &= \left(a \cos\left(\varphi_0 + \tfrac{2}{3}\pi\right), b \sin\left(\varphi_0 + \tfrac{2}{3}\pi\right)\right), \\ x_2 &= \left(a \cos\left(\varphi_0 + \tfrac{4}{3}\pi\right), b \sin\left(\varphi_0 + \tfrac{4}{3}\pi\right)\right), \end{aligned}$$

jene Punkte auf der Ellipse dar, für die der Flächeninhalt des Dreiecks, das durch die drei Eckpunkte x_0, x_1 und $x_2 \in \mathbb{R}^2$ gebildet wird, einen maximalen Wert hat. $\square$

Aufgabe 7. Seien eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und eine rechte Seite $y \in \mathbb{R}^m$ beliebig vorgegeben sowie desweiteren $P \in L(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^m)$ der Orthogonalprojektor von $\mathbb{R}^m$ auf den Bildraum $A[\mathbb{R}^n] \subset \mathbb{R}^m$. Man zeige, daß die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. Der Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ ist eine Lösung des Gleichungssystems $Ax = P(y)$.
2. Der Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ ist eine Lösung des Gleichungssystems $A^\top Ax = A^\top y$.
3. Der Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ ist ein globaler Minimumpunkt der durch die Vorschrift $f(\xi) = \|A\xi - y\|^2$ für $\xi \in \mathbb{R}^n$ definierten Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Lösung. 1. Sei $x \in \mathbb{R}^n$ eine Lösung des Gleichungssystems $Ax = P(y)$. Dann gilt wegen $A\xi \in A[\mathbb{R}^n]$ und $y - P(y) \in A[\mathbb{R}^n]^\perp$ für jedes $\xi \in \mathbb{R}^n$ die Beziehung

$$(A^\top Ax|\xi) = (Ax|A\xi) = (P(y)|A\xi) = (y|A\xi) - (y - P(y)|A\xi) = (y|A\xi) = (A^\top y|\xi)$$

und somit $A^\top Ax = A^\top y$.

2. Sei $x \in \mathbb{R}^n$ eine Lösung des Gleichungssystems $A^\top Ax = A^\top y$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\|A\xi - y\|^2 &= \|Ax - y\|^2 + 2(A(\xi - x)|Ax - y) + \|A(\xi - x)\|^2\\ &= \|Ax - y\|^2 + 2(\xi - x|A^\top Ax - A^\top y) + \|A(\xi - x)\|^2\\ &= \|Ax - y\|^2 + \|A(\xi - x)\|^2 \geq \|Ax - y\|^2\end{aligned}$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$, woraus sich ergibt, daß $x \in \mathbb{R}^n$ ein globaler Minimumpunkt der Funktion f ist.

3. Sei $x \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt derart, daß $\|Ax - y\|^2 \leq \|A\xi - y\|^2$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ gilt. Wegen $Ax - P(y) \in A[\mathbb{R}^n]$ und $y - P(y) \in A[\mathbb{R}^n]^\perp$ erhält man zunächst

$$\|Ax - P(y)\|^2 + \|P(y) - y\|^2 = \|Ax - y\|^2 \leq \|A\xi - y\|^2$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$. Da es stets ein Urbild $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $A\xi = P(y) \in A[\mathbb{R}^n]$ gibt, folgt daraus $\|Ax - P(y)\|^2 = 0$ und somit $Ax = P(y)$. $\square$