Übungsaufgaben 11

Mehrdimensionale Integration

Aufgabe 1. Sei eine lokale Parametrisierung (Y, Ψ) des einschaligen Hyperboloids $H = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1\}$ durch

$$\Psi(y) = \begin{pmatrix} \cos y_1 \\ \sin y_1 \\ 0 \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} -\sin y_1 \\ \cos y_1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{für } y \in Y =]0, 2\pi[\times \mathbb{R} \text{ gegeben.}$$

Man bestimme den Flächeninhalt der Teilmenge $H(h) = \{x \in H \mid |x_3| < h\}$ des Hyperboloids, wenn $h > 0$ beliebig vorgegeben wird! ⑥

Lösung. 1. Als Ableitung von Ψ in $y \in Y$ bekommt man zunächst

$$D\Psi(y) = \begin{pmatrix} -\sin y_1 - y_2 \cos y_1 & -\sin y_1 \\ \cos y_1 - y_2 \sin y_1 & \cos y_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in L(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^3)$$

und somit für die Gram-Matrix

$$G(D_1\Psi(y), D_2\Psi(y)) = \begin{pmatrix} 1 + y_2^2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in L(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2).$$

Aus der Berechnung der Determinante $\det G(D_1\Psi(y), D_2\Psi(y)) = 1 + 2y_2^2$ ergibt sich für das Flächenstück $H(h) = \{x \in H \mid |x_3| < h\}$ des Hyperboloids der Inhalt

$$F(h) = \int_{-h}^{h} \int_{0}^{2\pi} \sqrt{1 + 2y_2^2}\, dy_1\, dy_2 = 2\pi \int_{-h}^{h} \sqrt{1 + 2y_2^2}\, dy_2.$$

Die durch $f(s) = \frac{1}{2}\sqrt{2} \sinh s$ für $s \in]-a, a[$ definierte Funktion $f :]-a, a[\to \mathbb{R}$ bildet das Intervall $]-a, a[$ mit $a = \operatorname{arsinh} \sqrt{2}\, h$ bijektiv auf das Intervall $]-h, h[$ ab. Wegen $Df(s) = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cosh s$ ergibt sich für das Integral

$$F(h) = \sqrt{2}\, \pi \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + \sinh^2 s}\, \cosh s\, ds = \sqrt{2}\, \pi \int_{-a}^{a} \cosh^2 s\, ds$$

und somit wegen $\cosh 2s = 2 \cosh^2 s - 1$ schließlich

$$F(h) = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \int_{-a}^{a} (1 + \cosh 2s)\, ds = \sqrt{2}\, \pi (a + \sinh a \cosh a),$$

also $F(h) = \sqrt{2}\, \pi \operatorname{arsinh} \sqrt{2}\, h + 2\pi h \sqrt{1 + 2h^2}$ für den Flächeninhalt der Teilmenge $H(h) = \{x \in H \mid |x_3| < h\}$ des Hyperboloids. □

Aufgabe 2. Sei der Reifen $K = \{\Psi(\rho,\varphi,\theta) \in \mathbb{R}^3 \mid \rho \in [0,r], \varphi,\theta \in [0,2\pi]\}$ mit dem Radius $a > 0$ des Leitkreises und dem Radius $r < a$ des Querschnittskreises durch

$$\Psi(\rho,\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} (a+\rho\cos\theta)\cos\varphi \\ (a+\rho\cos\theta)\sin\varphi \\ \rho\sin\theta \end{pmatrix} \quad \text{für } \rho \in [0,r] \text{ und } \varphi,\,\theta \in [0,2\pi] \text{ gegeben.}$$

Man berechne die kinetische Energie $E(v) = \frac{1}{2}(Tv|v)$ der Rotation des Reifens K um die Drehachse $v \in \mathbb{R}^3$ mit dem Betrag $\|v\|$ der Drehgeschwindigkeit, wobei die symmetrische Trägheitsmatrix $T \in L(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$ des Reifens K durch

$$T = \begin{pmatrix} \int_K \left(\|x\|^2 - x_1^2\right) dx & -\int_K x_1x_2\,dx & -\int_K x_1x_3\,dx \\ -\int_K x_2x_1\,dx & \int_K \left(\|x\|^2 - x_2^2\right) dx & -\int_K x_2x_3\,dx \\ -\int_K x_3x_1\,dx & -\int_K x_3x_2\,dx & \int_K \left(\|x\|^2 - x_3^2\right) dx \end{pmatrix}$$

definiert wird! ⑧

Lösung. 1. Die Parametrisierung $\Psi : \,]0,r[\,\times\,]0,2\pi[\,\times\,]0,2\pi[\, \to \mathbb{R}^3$ des Reifens K besitzt in $(\rho,\varphi,\theta) \in \,]0,r[\,\times\,]0,2\pi[\,\times\,]0,2\pi[$ die Ableitung

$$D\Psi(\rho,\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -(a+\rho\cos\theta)\sin\varphi & -\rho\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi & (a+\rho\cos\theta)\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta & 0 & \rho\cos\theta \end{pmatrix} \in L(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$$

und somit die Gram-Matrix

$$D\Psi(\rho,\varphi,\theta)^\intercal D\Psi(\rho,\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (a+\rho\cos\theta)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho^2 \end{pmatrix} \in L(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3),$$

woraus sich die Dichte $\sqrt{\det D\Psi(\rho,\varphi,\theta)^\intercal D\Psi(\rho,\varphi,\theta)} = \rho(a+\rho\cos\theta)$ ergibt.

2. Für die symmetrische Trägheitsmatrix $T \in L(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$ müssen die sechs Integrale $\int_K x_k x_\ell\,dx$ für $k,\ell \in \{1,2,3\}$ berechnet werden:

2.1. Wegen $\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\,d\varphi = \pi$ sowie $\int_0^{2\pi} \cos\theta\,d\theta = 0$ und $\int_0^{2\pi} \cos^3\theta\,d\theta = 0$ gilt

$$\begin{aligned} \int_K x_1^2\,dx &= \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho(a+\rho\cos\theta)^3 \cos^2\varphi\,d\varphi\,d\theta\,d\rho \\ &= \pi \int_0^r \int_0^{2\pi} \rho\big(a^3 + 3a^2\rho\cos\theta + 3a\rho^2\cos^2\theta + \rho^3\cos^3\theta\big)\,d\theta\,d\rho \\ &= \pi \int_0^r \int_0^{2\pi} \rho\big(a^3 + 3a\rho^2\cos^2\theta\big)\,d\theta\,d\rho = \pi^2 a r^2\big(a^2 + \tfrac{3}{4}r^2\big). \end{aligned}$$

2.2. Aufgrund von $\int_0^{2\pi} \sin^2\varphi \, d\varphi = \pi$ erhält man wie zuvor

$$\int_K x_2^2 \, dx = \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho(a + \rho\cos\theta)^3 \sin^2\varphi \, d\varphi \, d\theta \, d\rho$$
$$= \pi \int_0^r \int_0^{2\pi} \rho(a + \rho\cos\theta)^3 \, d\theta \, d\rho = \pi^2 a r^2 \big(a^2 + \tfrac{3}{4} r^2\big).$$

2.3. Aus $\int_0^{2\pi} \cos\theta \sin^2\theta \, d\theta = 0$ und $\int_0^{2\pi} \sin^2\theta \, d\theta = \pi$ folgt

$$\int_K x_3^2 \, dx = \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho^3 (a + \rho\cos\theta) \sin^2\theta \, d\varphi \, d\theta \, d\rho$$
$$= 2\pi \int_0^r \int_0^{2\pi} a\rho^3 \sin^2\theta \, d\theta \, d\rho = \tfrac{1}{2}\pi^2 a r^4.$$

2.4. Wegen $\int_0^{2\pi} \cos\varphi \sin\varphi \, d\varphi = 0$ sowie $\int_0^{2\pi} \sin\varphi \, d\varphi = 0$ und $\int_0^{2\pi} \cos\varphi \, d\varphi = 0$ verschwinden die restlichen Integrale

$$\int_K x_1 x_2 \, dx = \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho(a + \rho\cos\theta)^3 \cos\varphi \sin\varphi \, d\varphi \, d\theta \, d\rho = 0,$$
$$\int_K x_2 x_3 \, dx = \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho^2 (a + \rho\cos\theta)^2 \sin\varphi \sin\theta \, d\varphi \, d\theta \, d\rho = 0,$$
$$\int_K x_3 x_1 \, dx = \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho^2 (a + \rho\cos\theta)^2 \cos\varphi \sin\theta \, d\varphi \, d\theta \, d\rho = 0.$$

3. Daraus ergibt sich die diagonale Trägheitsmatrix

$$T = \begin{pmatrix} \int_K \big(x_2^2 + x_3^2\big)\, dx & 0 & 0 \\ 0 & \int_K \big(x_3^2 + x_1^2\big)\, dx & 0 \\ 0 & 0 & \int_K \big(x_1^2 + x_2^2\big)\, dx \end{pmatrix}$$
$$= 2\pi a \cdot \pi r^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a^2 + \frac{5}{8}r^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}a^2 + \frac{5}{8}r^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + \frac{3}{4}r^2 \end{pmatrix} \in L(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$$

sowie die kinetische Energie

$$E(v) = \tfrac{1}{2}(Tv|v) = 2\pi a \cdot \pi r^2 \Big(\big(\tfrac{1}{4}a^2 + \tfrac{5}{16}r^2\big)\big(v_1^2 + v_2^2\big) + \big(\tfrac{1}{2}a^2 + \tfrac{3}{8}r^2\big)v_3^2\Big)$$

der Rotation des Reifens K um die Drehachse $v \in \mathbb{R}^3$, welche ihren maximalen Wert bzgl. aller Richtungen $v \in \mathbb{R}^3$ und normierter Geschwindigkeit $\|v\| = 1$ im Falle $v_1 = v_2 = 0$ und $v_3 = \pm 1$ erreicht. □

Aufgabe 3. Sei ein Winkel $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ beliebig gegeben sowie die Parametrisierung $(\Psi, \mathbb{R})$ der Spirale $M = \Psi[\mathbb{R}] \subset \mathbb{R}^3$ durch

$$\Psi(y) = \frac{1}{\cosh(y\cot\alpha)} \begin{pmatrix} \cos y \\ \sin y \\ \sinh(y\cot\alpha) \end{pmatrix} \quad \text{für } y \in \mathbb{R} \text{ definiert.}$$

1. Man zeige, daß M eine Kurve auf der Sphäre $S = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\|^2 = 1\right\}$ ist!
2. Man berechne die Länge $L = \int_{-\infty}^{\infty} \|D\Psi(y)\|\, dy$ der Spirale M! ⑥

Lösung. 1. Tatsächlich gilt für alle $y \in \mathbb{R}$ die Beziehung

$$\|\Psi(y)\|^2 = \frac{\cos^2 y + \sin^2 y + \sinh^2(y\cot\alpha)}{\cosh^2(y\cot\alpha)} = \frac{1 + \sinh^2(y\cot\alpha)}{\cosh^2(y\cot\alpha)} = 1.$$

2.1. Als Ableitung von $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ in $y \in \mathbb{R}$ erhält man

$$D\Psi(y) = \frac{1}{\cosh^2(y\cot\alpha)} \begin{pmatrix} -\sin y\cosh(y\cot\alpha) - \cos y\sinh(y\cot\alpha)\cot\alpha \\ \cos y\cosh(y\cot\alpha) - \sin y\sinh(y\cot\alpha)\cot\alpha \\ \cosh^2(y\cot\alpha)\cot\alpha - \sinh^2(y\cot\alpha)\cot\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\cosh^2(y\cot\alpha)\sin\alpha} \begin{pmatrix} -\sin y\cosh(y\cot\alpha)\sin\alpha - \cos y\sinh(y\cot\alpha)\cos\alpha \\ \cos y\cosh(y\cot\alpha)\sin\alpha - \sin y\sinh(y\cot\alpha)\cos\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$$

und somit wegen $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$ für die Norm

$$\|D\Psi(y)\|^2 = \frac{\cosh^2(y\cot\alpha)\sin^2\alpha + \sinh^2(y\cot\alpha)\cos^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cosh^4(y\cot\alpha)\sin^2\alpha}$$

$$= \frac{\cosh^2(y\cot\alpha)\sin^2\alpha + \cosh^2(y\cot\alpha)\cos^2\alpha}{\cosh^4(y\cot\alpha)\sin^2\alpha} = \frac{1}{\cosh^2(y\cot\alpha)\sin^2\alpha}$$

für jedes $y \in \mathbb{R}$.

2.2. Daraus folgt für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ zunächst

$$\int_a^b \|D\Psi(y)\|\, dy = \frac{1}{\sin\alpha}\int_a^b \frac{dy}{\cosh(y\cot\alpha)} = \frac{2}{\sin\alpha}\int_a^b \frac{\exp(y\cot\alpha)\, dy}{(\exp(y\cot\alpha))^2 + 1}$$

$$= \frac{2}{\sin\alpha} \cdot \frac{\arctan\exp(b\cot\alpha) - \arctan\exp(a\cot\alpha)}{\cot\alpha}$$

und wegen $\lim_{a\to-\infty} \arctan\exp(a\cot\alpha) = 0$ sowie $\lim_{b\to\infty} \arctan\exp(b\cot\alpha) = \frac{\pi}{2}$ schließlich das uneigentliche Integral

$$L = \int_{-\infty}^{\infty} \|D\Psi(y)\|\, dy = \frac{\pi}{\cos\alpha}$$

als endliche Länge der Spirale $M \subset S$. □

Aufgabe 4. Sei die lokale Parametrisierung (Y, Ψ) einer Hemisphäre

$$H(r) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 > 0,\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2\}$$

um den Nullpunkt vom Radius $r > 0$ durch die Vorschrift

$$\Psi(y) = \begin{pmatrix} r\cos y_2 \cos y_1 \\ r\cos y_2 \sin y_1 \\ r \sin y_2 \end{pmatrix} \quad \text{für } y \in Y =]0, 2\pi[\times]0, \tfrac{\pi}{2}[\text{ gegeben.}$$

Man berechne Flächeninhalt $F(r)$ und Schwerpunkt

$$\xi = \frac{1}{F(r)} \int_{H(r)} x\, dx \in \mathbb{R}^3$$

der Hemisphäre $H(r)$!

Lösung. 1. Die Ableitung der lokalen Parametrisierung $\Psi : Y \to \mathbb{R}^3$ hat die Gestalt

$$D\Psi(y) = \begin{pmatrix} -r\cos y_2 \sin y_1 & -r \sin y_2 \cos y_1 \\ r\cos y_2 \cos y_1 & -r\sin y_2 \sin y_1 \\ 0 & r\cos y_2 \end{pmatrix} \in L(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^3) \quad \text{für } y \in Y,$$

woraus sich die Gram-Matrix

$$D\Psi(y)^\intercal D\Psi(y) = \begin{pmatrix} r^2 \cos^2 y_2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

sowie $\sqrt{\det D\Psi(y)^\intercal D\Psi(y)} = r^2 \cos y_2$ für jedes $y \in Y$ ergibt. Somit hat die Hemisphäre den Flächeninhalt

$$\begin{aligned} F(r) &= \int_Y \sqrt{\det D\Psi(y)^\intercal D\Psi(y)}\, dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} r^2 \cos y_2\, dy_2\, dy_1 \\ &= 2\pi r^2 \int_0^{\pi/2} \cos y_2\, dy_2 = 2\pi r^2 \cdot \sin\tfrac{\pi}{2} = 2\pi r^2. \end{aligned}$$

2. Für den Schwerpunkt sind drei Integrale $\int_{H(r)} x_k\, dx$ für $k \in \{1, 2, 3\}$ zu berechnen: Wegen $\int_0^{2\pi} \cos y_1\, dy_1 = 0$ und $\int_0^{2\pi} \sin y_1\, dy_1 = 0$ ergibt sich zunächst

$$\int_{H(r)} x_1\, dx = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} r^3 \cos^2 y_2 \cos y_1\, dy_2\, dy_1 = 0,$$

$$\int_{H(r)} x_2\, dx = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} r^3 \cos^2 y_2 \sin y_1\, dy_2\, dy_1 = 0.$$

Desweiteren erhält man

$$\int_{H(r)} x_3\, dx = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} r^3 \cos y_2 \sin y_2\, dy_2\, dy_1 = \pi r^3 \int_0^{\pi/2} \sin 2y_2\, dy_2 = \pi r^3.$$

Somit hat der Schwerpunkt $\xi \in \mathbb{R}^3$ der Hemisphäre die Koordinaten $\xi_1 = \xi_2 = 0$ sowie $\xi_3 = \frac{1}{2} r$. □

Aufgabe 5. Sei die lokale Parametrisierung (Y, Ψ) eines Torus

$$T(r) = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + a^2 - r^2)^2 = 4a^2(x_1^2 + x_2^2)\right\}$$

mit einem Leitkreis vom Radius $a > 0$ und einem kreisförmigen Querschnitt vom Radius $r < a$ durch die Vorschrift

$$\Psi(y) = \begin{pmatrix} (a + r\cos y_2)\cos y_1 \\ (a + r\cos y_2)\sin y_1 \\ r\sin y_2 \end{pmatrix} \quad \text{für } y \in Y =]0, 2\pi[\times]0, 2\pi[$$

gegeben. Man berechne den Flächeninhalt des Torus $T(r)$ und den Rauminhalt des vom Torus $T(r)$ eingeschlossenen Reifens!

Lösung. 1. Die Ableitung der lokalen Parametrisierung $\Psi : Y \to \mathbb{R}^3$ hat die Gestalt

$$D\Psi(y) = \begin{pmatrix} -(a + r\cos y_2)\sin y_1 & -r\sin y_2 \cos y_1 \\ (a + r\cos y_2)\cos y_1 & -r\sin y_2 \sin y_1 \\ 0 & r\cos y_2 \end{pmatrix} \in L(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^3)$$

für $y \in Y$, woraus sich die Gram-Matrix

$$G(D_1\Psi(y), D_2\Psi(y)) = \begin{pmatrix} (a + r\cos y_2)^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

sowie $\sqrt{\det G(D_1\Psi(y), D_2\Psi(y))} = r(a + r\cos y_2)$ für jedes $y \in Y$ ergibt. Somit hat der Torus mit dem kreisförmigen Querschnitt von Radius $r < a$ den Flächeninhalt

$$\begin{aligned} F(r) &= \int_Y \sqrt{\det G(D_1\Psi(y), D_2\Psi(y))}\, dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} r(a + r\cos y_2)\, dy_2\, dy_1 \\ &= 2\pi r \int_0^{2\pi} (a + r\cos y_2)\, dy_2 = 2\pi r \int_0^{2\pi} a\, dy_2 = 2\pi r \cdot 2\pi a, \end{aligned}$$

der damit das Produkt des Umfangs $2\pi a$ des Leitkreises und des Umfangs $2\pi r$ des kreisförmigen Querschnitts ist.

2. Der Rauminhalt $R(r)$ des vom Torus $T(r)$ eingeschlossenen Reifens läßt sich als Integral über den Flächeninhalt $F(\rho) = 2\pi\rho \cdot 2\pi a$ des Torus $T(\rho)$ mit dem kreisförmigen Querschnitt vom Radius $\rho = 0$ bis zum Radius $\rho = r$ darstellen, also

$$R(r) = \int_0^r F(\rho)\, d\rho = \int_0^r 2\pi\rho \cdot 2\pi a\, d\rho = \pi r^2 \cdot 2\pi a,$$

was mit dem Produkt des Umfangs $2\pi a$ des Leitkreises und dem Flächeninhalt πr^2 des kreisförmigen Querschnitts übereinstimmt. $\square$

Aufgabe 6. Sei $\gamma > 0$ die Gravitationskonstante. Man berechne die Anziehungskraft

$$F = \gamma\rho_1\rho_2 \int_{K_2}\int_{K_1} \frac{x-z}{\|x-z\|^3}\,dx\,dz \in \mathbb{R}^3,$$

die eine Kugel $K_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x-a\| < r_1\}$ um $a \in \mathbb{R}^3$ mit dem Radius $r_1 > 0$ und der Massendichte $\rho_1 > 0$ auf eine zweite Kugel $K_2 = \{z \in \mathbb{R}^3 \mid \|z-b\| < r_2\}$ um $b \in \mathbb{R}^3$ mit dem Radius $r_2 > 0$ und der Massendichte $\rho_2 > 0$ ausübt, wobei $r_1 + r_2 < \|a-b\|$ gelten soll!

Lösung. 1. Ein Punkt $z \in K_2$ der Kugel K_2 wird festgehalten und das innere Integral

$$\int_{K_1} \frac{x-z}{\|x-z\|^3}\,dx \in \mathbb{R}^3$$

durch Transformation auf *Kugelkoordinaten* berechnet. Die Polarachse verläuft durch den Mittelpunkt $a \in \mathbb{R}^3$ der Kugel K_1 und den festgehaltenen Punkt $z \in K_2$, wodurch der Einheitsvektor $v_3 = \frac{a-z}{\|a-z\|} \in \mathbb{R}^3$ festgelegt wird. Die beiden Einheitsvektoren $v_1 \in \mathbb{R}^3$ und $v_2 \in \mathbb{R}^3$ ergänzen $v_3 \in \mathbb{R}^3$ zu einer Orthonormalbasis $\{v_1, v_2, v_3\}$ des $\mathbb{R}^3$. Jeder Punkt $x \in \mathbb{R}^3$ kann mit Hilfe der durch

$$\Psi(r,\varphi,\theta) = a + rv_1\cos\varphi\sin\theta + rv_2\sin\varphi\sin\theta + rv_3\cos\theta$$

gegebenen Abbildung $\Psi : [0,\infty[\times [0,2\pi] \times [0,\pi] \to \mathbb{R}^3$ durch Kugelkoordinaten $r \in [0,\infty[$, $\varphi \in [0,2\pi]$ und $\theta \in [0,\pi]$ parametrisiert werden. Daraus ergibt sich die Beschreibung $K_1 = \{\Psi(r,\varphi,\theta) \in \mathbb{R}^3 \mid r \in [0,r_1],\ \varphi \in [0,2\pi],\ \theta \in [0,\pi]\}$.

2. Als partielle Ableitungen von Ψ in $(r,\varphi,\theta) \in [0,\infty[\times [0,2\pi] \times [0,\pi]$ erhält man

$$\begin{aligned}
D_1\Psi(r,\varphi,\theta) &= v_1\cos\varphi\sin\theta + v_2\sin\varphi\sin\theta + v_3\cos\theta,\\
D_2\Psi(r,\varphi,\theta) &= -rv_1\sin\varphi\sin\theta + rv_2\cos\varphi\sin\theta,\\
D_3\Psi(r,\varphi,\theta) &= rv_1\cos\varphi\cos\theta + rv_2\sin\varphi\cos\theta - rv_3\sin\theta
\end{aligned}$$

und somit die Dichte $\sqrt{\det D\Psi(r,\varphi,\theta)^\intercal D\Psi(r,\varphi,\theta)} = r^2\sin\theta$. Mit Hilfe der Transformationsformel ergibt sich das Integral

$$\int_{K_1} \frac{x-z}{\|x-z\|^3}\,dx = \int_0^{r_1}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\Psi(r,\varphi,\theta)-z}{\|\Psi(r,\varphi,\theta)-z\|^3}\,r^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\,dr.$$

Aufgrund der Gestalt der beiden Terme

$$\begin{aligned}
\Psi(r,\varphi,\theta) - z &= rv_1\cos\varphi\sin\theta + rv_2\sin\varphi\sin\theta + v_3(r\cos\theta + \|a-z\|)\\
\|\Psi(r,\varphi,\theta) - z\|^2 &= r^2 + 2r\|a-z\|\cos\theta + \|a-z\|^2
\end{aligned}$$

sowie der Beziehungen $\int_0^{2\pi}\sin\varphi\,d\varphi = 0$ und $\int_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi = 0$ folgt daraus zunächst

$$\int_{K_1} \frac{x-z}{\|x-z\|^3}\,dx = \frac{2\pi(a-z)}{\|a-z\|}\int_0^{r_1}\int_0^{\pi} \frac{(r\cos\theta + \|a-z\|)\,r^2\sin\theta\,d\theta\,dr}{(r^2 + 2r\|a-z\|\cos\theta + \|a-z\|^2)^{3/2}}.$$

3. Sei der Radius $r \in [0, r_1]$ beliebig vorgegeben. Zur Berechnung des inneren Integrals eignet sich die durch

$$f(\theta) = \sqrt{r^2 + 2r\|a - z\| \cos\theta + \|a - z\|^2} \quad \text{für } \theta \in [0, \pi]$$

definierte Variablentransformation $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ der alten Variablen $\theta \in [0, \pi]$ in die neue Variable $h = f(\theta) \in [\|a - z\| - r, \|a - z\| + r]$. Aufgrund der Beziehungen

$$\frac{f^2(\theta) - \|a - z\|^2 - r^2}{2\|a - z\|} = r\cos\theta \quad \text{und} \quad Df(\theta) = -\frac{r\|a - z\| \sin\theta}{f(\theta)} \quad \text{für } \theta \in [0, \pi]$$

ergibt sich für das innere Integral

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{(r\cos\theta + \|a - z\|)\, r^2 \sin\theta \, d\theta}{f^3(\theta)} &= -r \int_0^\pi \frac{f^2(\theta) + \|a - z\|^2 - r^2}{2\|a - z\| f^2(\theta)} \cdot \frac{Df(\theta)}{\|a - z\|} \, d\theta \\ &= \frac{r}{2\|a - z\|^2} \int_{\|a-z\|-r}^{\|a-z\|+r} \left(1 + \frac{\|a - z\|^2 - r^2}{h^2}\right) dh = \frac{2r^2}{\|a - z\|^2} \end{aligned}$$

für jeden Radius $r \in [0, r_1]$. Mit Schritt 2 folgt daraus

$$\int_{K_1} \frac{x - z}{\|x - z\|^3} \, dx = \frac{2\pi(a - z)}{\|a - z\|} \int_0^{r_1} \frac{2r^2 dr}{\|a - z\|^2} = \frac{4\pi r_1^3}{3} \frac{a - z}{\|a - z\|^3}$$

für jeden Punkt $z \in K_2$.

4. Daraus folgt für das gesuchte Integral der Anziehungskraft

$$F = \gamma\rho_1\rho_2 \int_{K_2} \int_{K_1} \frac{x - z}{\|x - z\|^3} \, dx \, dz = \gamma\rho_2 \frac{4\pi\rho_1 r_1^3}{3} \int_{K_2} \frac{a - z}{\|a - z\|^3} \, dz.$$

Das verbliebene Integral über die Kugel K_2 um $b \in \mathbb{R}^3$ mit dem Radius $r_2 > 0$ ist vom gleichen Typ wie das zuvor berechnete Integral über die Kugel K_1 um $a \in \mathbb{R}^3$ mit dem Radius $r_1 > 0$, woraus sich

$$\int_{K_2} \frac{z - a}{\|z - a\|^3} \, dz = \frac{4\pi r_2^3}{3} \frac{b - a}{\|b - a\|^3}$$

ergibt. Schließlich ist

$$F = \gamma\rho_2 \frac{4\pi\rho_1 r_1^3}{3} \int_{K_2} \frac{a - z}{\|a - z\|^3} \, dz = \gamma \, \frac{4\pi\rho_1 r_1^3}{3} \, \frac{4\pi\rho_2 r_2^3}{3} \, \frac{a - b}{\|a - b\|^3} = \gamma m_1 m_2 \frac{a - b}{\|a - b\|^3}$$

die Anziehungskraft, welche die Kugel K_1 um $a \in \mathbb{R}^3$ und der Masse $m_1 = \frac{4}{3}\pi\rho_1 r_1^3$ auf die Kugel K_2 um $b \in \mathbb{R}^3$ und der Masse $m_2 = \frac{4}{3}\pi\rho_2 r_2^3$ ausübt. Würden beide Kugeln jeweils auf ihre Mittelpunkte $a \in \mathbb{R}^3$ bzw. $b \in \mathbb{R}^3$ bei Erhaltung ihrer Massen m_1 bzw. m_2 zusammenschrumpfen, so würde der Massenpunkt $a \in \mathbb{R}^3$ die gleiche Anziehungskraft auf den Massenpunkt $b \in \mathbb{R}^3$ ausüben! $\square$

Aufgabe 7. Man weise die Konvergenz des uneigentlichen Integrals

$$G(\tau,\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-4\pi^2\tau\|x\|^2\right) \operatorname{Exp}\left(2\pi\mathbb{i}(\xi|x)\right) dx = \frac{1}{\sqrt{(4\pi\tau)^n}} \exp\left(-\frac{\|\xi\|^2}{4\tau}\right)$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$, $\tau > 0$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$ nach!

Lösung. 1. Um in einem ersten Schritt die Konvergenz des Integrals

$$\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-t^2\right) dt = \sqrt{\pi} \tag{1}$$

nachzuweisen, soll durch

$$\Psi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} \quad \text{für } r \in [0,\infty[\text{ und } \varphi \in [0,2\pi]$$

die Parametrisierung $\Psi : [0,\infty[\times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ von $\mathbb{R}^2$ durch Polarkoordinaten herangezogen werden. Daraus ergibt sich für die Ableitung und deren Gram-Matrix

$$D\Psi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad D\Psi(r,\varphi)^\mathsf{T} D\Psi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$

Die Dichte $\sqrt{\det D\Psi(r,\varphi)^\mathsf{T} D\Psi(r,\varphi)} = r$ liefert somit das Integral

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-\|x\|^2\right) dx &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \exp\left(-\|\Psi(r,\varphi)\|^2\right) \sqrt{\det D\Psi(r,\varphi)^\mathsf{T} D\Psi(r,\varphi)}\, d\varphi\, dr \\ &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} r\exp\left(-r^2\right) d\varphi\, dr = \pi \int_0^\infty 2r\exp\left(-r^2\right) dr = \pi. \end{aligned}$$

Daraus folgt die Beziehung (1) mit Hilfe der Produktdarstellung

$$\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-x_1^2\right) dx_1 \cdot \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-x_2^2\right) dx_2 = \int_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-\|x\|^2\right) dx = \pi.$$

2. Im nächsten Schritt wird die Konvergenz des parameterabhängigen Integrals

$$\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-t^2\right) \cos 2st\, dt = \sqrt{\pi}\exp\left(-s^2\right) \quad \text{für jedes } s \in \mathbb{R} \text{ gezeigt.} \tag{2}$$

2.1. Definiert man die differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(t,s) = \exp\left(-t^2\right)\cos 2st \quad \text{für } t \in \mathbb{R} \text{ und } s \in \mathbb{R},$$

dann gilt $|f(t,s)| \le \exp\left(-t^2\right)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und $s \in \mathbb{R}$. Wegen Schritt 1 ist die durch

$$h(s) = \int_{\mathbb{R}} f(t,s)\, dt = \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-t^2\right)\cos 2st\, dt \quad \text{für } s \in \mathbb{R}$$

erklärte Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar, und ihre Ableitung hat die Gestalt

$$\begin{aligned} Dh(s) &= \int_{\mathbb{R}} D_2 f(t,s)\, dt = -\int_{\mathbb{R}} 2t\exp\left(-t^2\right) \cdot \sin 2st\, dt \\ &= -\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-t^2\right) \cdot 2s\cos 2st\, dt = -2sh(s). \end{aligned}$$

2.2. Da die differenzierbare Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aufgrund der Beziehung (1) den Wert $h(0) = \sqrt{\pi} > 0$ besitzt, ist das Supremum $\sigma = \sup\big\{s \geq 0 \mid h(s) > 0\big\}$ positiv. Für jedes fixierte $s \in \,]0, \sigma[$ und alle $\tau \in [0, s]$ gilt demzufolge

$$Dh(\tau) = -2\tau h(\tau) \leq 0 \quad \text{und damit} \quad h(0) \geq h(\tau) \geq h(s) > 0,$$

woraus sich durch Integration

$$\ln \frac{h(s)}{h(0)} = \int_0^s \frac{Dh(\tau)\, d\tau}{h(\tau)} = -\int_0^s 2\tau\, d\tau = -s^2$$

und somit $h(s) = \sqrt{\pi} \exp\big(-s^2\big)$ ergibt. Daraus folgt zunächst $\sigma = \infty$ und schließlich die Beziehung (2), da h eine gerade Funktion ist.

3.1. Sei $k \in \{1, \ldots, n\}$ beliebig vorgegeben. Aufgrund der Abschätzung

$$\big|\exp\big(-4\pi^2\tau x_k^2\big) \operatorname{Exp}\big(2\pi \mathbb{i}\xi_k x_k\big)\big| = \exp\big(-4\pi^2\tau x_k^2\big) \quad \text{für } \tau > 0 \text{ und } \xi_k \in \mathbb{R}$$

und der Beziehung (1) konvergiert das uneigentliche Integral

$$\int_{\mathbb{R}} \exp\big(-4\pi^2\tau x_k^2\big) \operatorname{Exp}\big(2\pi \mathbb{i}\xi_k x_k\big)\, dx_k$$

für jedes $\tau > 0$ und $\xi_k \in \mathbb{R}$. Dabei verschwindet das Integral über den ungeraden Imaginärteil. Für das Integral über den Realteil ergibt sich durch die Variablentransformation $t = 2\pi\sqrt{\tau} x_k$ und die Parameterwahl $s = \frac{1}{2\sqrt{\tau}}\xi_k$ zunächst

$$\int_{\mathbb{R}} \exp\big(-4\pi^2\tau x_k^2\big) \cos\big(2\pi\xi_k x_k\big)\, dx_k = \frac{1}{2\pi\sqrt{\tau}} \int_{\mathbb{R}} \exp\big(-t^2\big) \cos 2st\, dt$$

und somit wegen Beziehung (2) demnach

$$\int_{\mathbb{R}} \exp\big(-4\pi^2\tau x_k^2\big) \cos\big(2\pi\xi_k x_k\big)\, dx_k = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \exp\left(-\frac{\xi_k^2}{4\tau}\right).$$

3.2. Daraus folgt schließlich die Produktdarstellung

$$\begin{aligned} G(\tau, \xi) &= \prod_{k=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} \exp\big(-4\pi^2\tau x_k^2\big) \operatorname{Exp}\big(2\pi \mathbb{i}\xi_k x_k\big)\, dx_k \\ &= \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \exp\left(-\frac{\xi_k^2}{4\tau}\right) = \frac{1}{\sqrt{(4\pi\tau)^n}} \exp\left(-\frac{\|\xi\|^2}{4\tau}\right) \end{aligned}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$, $\tau > 0$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$. $\square$