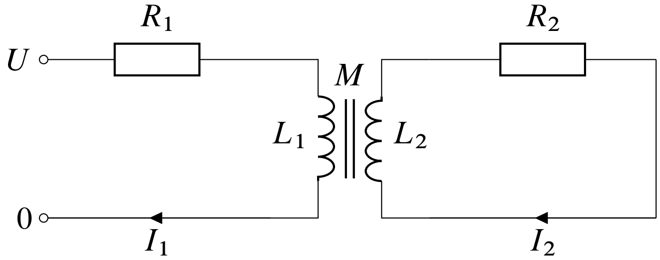
Übungsaufgaben 12

Anfangswertprobleme erster Ordnung

Aufgabe 1. In einem Wechselstromtransformator seien Spulen mit den Induktivitäten $L_1 = 7\,\mathrm{H}$, $L_2 = 28\,\mathrm{H}$, den Widerständen $R_1 = 60\,\Omega$, $R_2 = 240\,\Omega$ und der gegenseitigen Induktivität $M = 6\,\mathrm{H}$ umeinandergewickelt. In den Spulen fließen Ströme, es wirken eingeprägte Spannungen sowie die von der Selbstinduktion hervorgerufenen und die von der Gegeninduktivität erzeugten Spannungen.



Gemäß des Ohmschen Gesetzes führt dies auf das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} DI_1(t) \\ DI_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U(t) \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1(t) \\ I_2(t) \end{pmatrix} \quad \text{für } t \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} I_1(0) \\ I_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Man berechne die Ströme $I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ für den Fall, daß eine reine Wechselspannung $U(t) = U_0 \sin \omega t$ mit $U_0 = 6800\,\mathrm{V}$ und $\omega = 8\,\mathrm{Hz}$ an der ersten Spule anliegt! ⑧

Lösung. 1. Das gegebene inhomogene Anfangswertproblem hat die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 6 & 28 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} DI_1(t) \\ DI_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6800 \sin 8t \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 60 & 0 \\ 0 & 240 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1(t) \\ I_2(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} I_1(0) \\ I_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei der Einfachheit halber während der Rechnung die physikalischen Einheiten weggelassen werden sollen. Um es in die explizite Form zu bringen, wird das System von links mit der Inversen der Matrix

$$A_1 = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 6 & 28 \end{pmatrix} \in L(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2), \quad \text{also mit } A_1^{-1} = \frac{1}{160} \begin{pmatrix} 28 & -6 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} \in L(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$$

multipliziert. Daraus ergibt sich die Matrix

$$A_0 = \frac{1}{160} \begin{pmatrix} 28 & -6 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -60 & 0 \\ 0 & -240 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -42 & 36 \\ 9 & -42 \end{pmatrix} \in L(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$$

für die explizite Formulierung des Anfangswertproblems

$$\begin{pmatrix} DI_1(t) \\ DI_2(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -42 & 36 \\ 9 & -42 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1(t) \\ I_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1190 \sin 8t \\ -255 \sin 8t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} I_1(0) \\ I_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. Die Auswertung der Determinante $\det(A_0 - \mu E_2) = 0$ zur Berechnung der Eigenwerte $\mu \in \mathbb{R}$ liefert

$$0 = \begin{vmatrix} -\frac{21}{2} - \mu & 9 \\ \frac{9}{4} & -\frac{21}{2} - \mu \end{vmatrix} = \mu^2 + 21\mu + 90 = (\mu + 6)(\mu + 15).$$

Somit ergeben sich die beiden reellen Eigenwerte $\mu_1 = -6$ und $\mu_2 = -15$.

Um die zum Eigenwert $\mu_1 = -6$ gehörende Lösung der homogenen Differentialgleichung zu finden, wird ein Eigenvektor $z_1 \in \mathbb{R}^2$ durch Lösung des linearen Gleichungssystems $(A_0 - \mu_1 E_2)z_1 = 0$ bestimmt. Elementare Umformungen der Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} -\frac{9}{2} & 9 \\ \frac{9}{4} & -\frac{9}{2} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow\!\urcorner + \\ \lrcorner \cdot 2 \end{array} \quad \text{liefern} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{9}{4} & -\frac{9}{2} \end{pmatrix} \text{ und somit } z_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

als Eigenvektor zu $\mu_1 = -6$.

Zur Berechnung der zum Eigenwert $\mu_2 = -15$ gehörenden Lösung der homogenen Differentialgleichung wird ein Eigenvektor $z_2 \in \mathbb{R}^2$ durch Lösung des linearen Gleichungssystems $(A_0 - \mu_2 E_2)z_2 = 0$ bestimmt. Elementare Umformungen der Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} \frac{9}{2} & 9 \\ \frac{9}{4} & \frac{9}{2} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow\!\urcorner + \\ \lrcorner \cdot (-2) \end{array} \quad \text{liefern} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{9}{4} & \frac{9}{2} \end{pmatrix} \text{ und somit } z_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

als Eigenvektor zu $\mu_2 = -15$.

3. Damit läßt sich jede Lösung $J : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ der homogenen Differentialgleichung $DJ(t) = A_0 J(t)$ als Linearkombination

$$\begin{pmatrix} J_1(t) \\ J_2(t) \end{pmatrix} = \xi_1 \mathrm{e}^{-6t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \xi_2 \mathrm{e}^{-15t} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{-6t} & 2\mathrm{e}^{-15t} \\ \mathrm{e}^{-6t} & -\mathrm{e}^{-15t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \quad \text{für } t \in \mathbb{R}$$

von zwei linear unabhängigen Lösungen mit den Koordinaten $\xi \in \mathbb{R}^2$ darstellen. Da zum Anfangszeitpunkt $t_0 = 0$ die Beziehung

$$\begin{pmatrix} J_1(0) \\ J_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \quad \text{und somit} \quad \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_1(0) \\ J_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

von den Koordinaten $\xi \in \mathbb{R}^2$ erfüllt wird, erhält man die Hauptfundamentalmatrix

$$V(t) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-6t} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-15t} \in L(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$$

für $t \in \mathbb{R}$ und ihre Inverse

$$V(t)^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{6t} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{15t} \in L(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2).$$

4. Wegen der homogenen Anfangsbedingung ergibt sich für das inhomogene Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} DI_1(t) \\ DI_2(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -42 & 36 \\ 9 & -42 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_1(t) \\ I_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1190\sin 8t \\ -255\sin 8t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} I_1(0) \\ I_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe der Hauptfundamentalmatrix $V(t)$ und ihrer Inversen $V(t)^{-1}$ die Lösung

$$\begin{pmatrix} I_1(t) \\ I_2(t) \end{pmatrix} = V(t)\int_0^t V(s)^{-1}\begin{pmatrix} 1190 \\ -255 \end{pmatrix}\sin 8s\, ds$$

für $t \in \mathbb{R}$ und somit

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} I_1(t) \\ I_2(t) \end{pmatrix} &= V(t)\begin{pmatrix} 340 \\ 170 \end{pmatrix}\int_0^t e^{6s}\sin 8s\, ds + V(t)\begin{pmatrix} 850 \\ -425 \end{pmatrix}\int_0^t e^{15s}\sin 8s\, ds \\ &= \begin{pmatrix} 340 \\ 170 \end{pmatrix} e^{-6t}\int_0^t e^{6s}\sin 8s\, ds + \begin{pmatrix} 850 \\ -425 \end{pmatrix} e^{-15t}\int_0^t e^{15s}\sin 8s\, ds. \end{aligned}$$

5. Bei der Berechnung von Integralen dieses Typs

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{\mu s}\sin\omega s\, ds &= \frac{1-e^{\mu t}\cos\omega t}{\omega} + \frac{\mu}{\omega}\int_0^t e^{\mu s}\cos\omega s\, ds, \\ &= \frac{1-e^{\mu t}\cos\omega t}{\omega} + \frac{\mu e^{\mu t}\sin\omega t}{\omega^2} - \frac{\mu^2}{\omega^2}\int_0^t e^{\mu s}\sin\omega s\, ds \end{aligned}$$

für $\mu \in \mathbb{R}$ und $\omega \neq 0$ wird zweimal teilweise integriert. Man erhält somit

$$\int_0^t e^{\mu s}\sin\omega s\, ds = \frac{\omega(1-e^{\mu t}\cos\omega t)}{\mu^2+\omega^2} + \frac{\mu e^{\mu t}\sin\omega t}{\mu^2+\omega^2}$$

für $\mu \in \mathbb{R}$ und $\omega \neq 0$. Wählt man insbesondere zwei Winkel $\alpha, \beta \in [0, 2\pi]$ mit

$$\sin\alpha = \frac{8}{10} \quad\text{und}\quad \cos\alpha = \frac{6}{10} \quad\text{sowie}\quad \sin\beta = \frac{8}{17} \quad\text{und}\quad \cos\beta = \frac{15}{17},$$

dann ergibt sich aufgrund der Additionstheoreme schließlich die Lösung

$$\begin{pmatrix} I_1(t) \\ I_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 \\ 17 \end{pmatrix}\left(e^{-6t}\sin\alpha + \sin(8t-\alpha)\right) + \begin{pmatrix} 50 \\ -25 \end{pmatrix}\left(e^{-15t}\sin\beta + \sin(8t-\beta)\right)$$

des Anfangswertproblems. Abgesehen von exponentiell abklingenden Beiträgen fließen die Wechselströme in beiden Spulen rein sinusförmig von gleicher Periode wie die eingeprägte Spannung und bleiben ihr um gewisse Phasenkonstanten zurück. □

Aufgabe 2. Seien $g, p \in \mathbb{R}$ und $a, b \in \mathbb{R}$ vorgegebene Konstanten mit $a < b$.

1. Man berechne für jeden Parameter $\delta \in \mathbb{R}$ die stetig differenzierbare Lösung $u_\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems

$$Du_\delta(t) = \delta u_\delta(t) + gt + p \;\text{ für } t \in \mathbb{R}, \;\; u_\delta(0) = 0,$$

wobei die beiden Fälle $\delta = 0$ und $\delta \neq 0$ unterschieden werden sollen!

2. Man zeige mit Hilfe der Exponentialreihe, daß die Beziehung

$$\lim_{\delta \to 0} \max_{t \in [a,b]} |u_\delta(t) - u_0(t)| = 0$$

der gleichmäßigen Konvergenz von (u_δ) gegen u_0 auf dem Intervall $[a, b]$ gilt! ⑥

Lösung. 1. Die Formel für die stetig differenzierbare Lösung $u_\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des obigen Anfangswertproblems liefert wegen $u_\delta(0) = 0$ für jedes $t \in \mathbb{R}$ die Darstellung

$$\begin{aligned} u_\delta(t) &= \exp\left(\int_0^t \delta \, ds\right) \int_0^t (gs + p) \exp\left(-\int_0^s \delta \, d\tau\right) ds \\ &= \exp(\delta t) \int_0^t (gs + p) \exp(-\delta s) \, ds. \end{aligned}$$

1.1. Im Falle $\delta = 0$ hat die Lösung $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Gestalt

$$u_0(t) = \int_0^t (gs + p) \, ds = \tfrac{1}{2} g t^2 + pt \;\text{ für alle } t \in \mathbb{R}.$$

1.2. Im Falle $\delta \neq 0$ erhält man für jedes $t \in \mathbb{R}$ durch Integration

$$\int_0^t \exp(-\delta s) \, ds = \frac{1 - \exp(-\delta t)}{\delta}$$

sowie teilweise Integration

$$\int_0^t s \exp(-\delta s) \, ds = \int_0^t \frac{\exp(-\delta s)}{\delta} \, ds - \frac{t \exp(-\delta t)}{\delta} = \frac{1 - \exp(-\delta t)}{\delta^2} - \frac{t \exp(-\delta t)}{\delta}$$

die Lösung $u_\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems in der Form

$$u_\delta(t) = \frac{g(\exp(\delta t) - 1)}{\delta^2} - \frac{gt}{\delta} + \frac{p(\exp(\delta t) - 1)}{\delta} \;\text{ für jedes } t \in \mathbb{R}.$$

2. Mit Hilfe der Exponentialreihe ergibt sich für die Differenz $u_\delta(t) - u_0(t)$ beider Lösungen für alle $t, \delta \in \mathbb{R}$ mit $0 < |\delta| < 1$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} |u_\delta(t) - u_0(t)| &= \left| \frac{g}{\delta^2} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\delta t)^k}{k!} - 1 \right) - \frac{gt}{\delta} - \frac{gt^2}{2} + \frac{p}{\delta} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\delta t)^k}{k!} - 1 \right) - pt \right| \\ &= \left| \frac{g}{\delta^2} \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(\delta t)^k}{k!} + \frac{p}{\delta} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\delta t)^k}{k!} \right| \leq |\delta g| \sum_{k=3}^{\infty} \frac{|t|^k}{k!} + |\delta p| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|t|^k}{k!} \end{aligned}$$

und somit $\max_{t \in [a,b]} |u_\delta(t) - u_0(t)| \leq |\delta|(|g| + |p|) \max_{t \in [a,b]} \exp(|t|)$, woraus die gleichmäßige Konvergenz $\lim_{\delta \to 0} \max_{t \in [a,b]} |u_\delta(t) - u_0(t)| = 0$ folgt. □

Aufgabe 3. Man berechne die Lösung $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ des Anfangswertproblems

$$Dv(t) = Av(t) \ \text{ für } t \in \mathbb{R}, \quad v(0) = x_0,$$

wobei die Matrix $A \in L(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ und der Anfangswert $x_0 \in \mathbb{R}^3$ durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben sind! 6

Lösung. 1. Die Auswertung der charakteristischen Gleichung $\det(A - \mu E_3) = \mathbb{0}$ zur Bestimmung der Nullstellen $\mu \in \mathbb{C}$ liefert

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\mu & 0 & 1 \\ 0 & 1-\mu & 1 \\ 1 & 1 & -\mu \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\mu & 0 & 1 \\ 0 & 1-\mu & 1 \\ \mu & 1 & -1-\mu \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\mu & 0 & 1 \\ 1 & 1-\mu & 1 \\ -1 & 1 & -1-\mu \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2-\mu & 0 & 1 \\ 2-\mu & 1-\mu & 1 \\ 0 & 1 & -1-\mu \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\mu & 0 & 1 \\ 0 & 1-\mu & 0 \\ 0 & 1 & -1-\mu \end{vmatrix} = (2-\mu)(1-\mu)(-1-\mu).$$

Folglich hat die Matrix A drei verschiedene Eigenwerte $\mu_1 = -1$, $\mu_2 = 1$ und $\mu_3 = 2$, ist also diagonalisierbar.

2. Um die zugehörigen Eigenvektoren $z_\ell \in \mathbb{R}^3$ für $\ell \in \{1, 2, 3\}$ zu ermitteln, werden die Lösungen des Gleichungssystems $(A - \mu_\ell E_3) z_\ell = 0$ berechnet:

Im Falle $\mu_1 = -1$ führen elementare Umformungen der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{auf} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{also } z_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Somit ist z_1 ein Eigenvektor zum Eigenwert $\mu_1 = -1$.

Für $\mu_2 = 1$ liefern elementare Umformungen der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{zunächst} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{also } z_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ist z_2 ein Eigenvektor zum Eigenwert $\mu_2 = 1$.

Für $\mu_3 = 2$ gelangt man durch elementare Umformungen der Matrix

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{zu} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{also } z_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist z_3 ein Eigenvektor zum Eigenwert $\mu_3 = 2$.

3. Somit besitzt das Fundamentalsystem $\{v_1, v_2, v_3\}$ der Gleichung $Dv(t) = Av(t)$ für $t \in \mathbb{R}$ die Gestalt

$$v_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \exp(-t), \quad v_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp(t), \quad v_3(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \exp(2t).$$

Die Lösung $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ des Anfangswertproblems

$$Dv(t) = Av(t) \ \text{ für } t \in \mathbb{R}, \quad v(0) = x_0,$$

läßt durch $v = \xi_1 v_1 + \xi_2 v_2 + \xi_3 v_3$ darstellen, wobei sich die Koordinaten $\xi \in \mathbb{R}^3$ aus der Anfangsbedingung $\xi_1 v_1(0) + \xi_2 v_2(0) + \xi_3 v_3(0) = x_0$ ergeben. Elementare äquivalente Unformungen dieses linearen Gleichungssystems führen auf

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & -1 \\ 1 & -1 & 1 & | & 3 \\ -2 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ + \\ \\ \end{array}, \text{ also } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & -1 \\ 2 & 0 & 2 & | & 2 \\ -2 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} + \\ | : 2 \quad \cdot 2 \quad \cdot(-1) \\ + \end{array}$$

sowie

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & | & -2 \\ 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 3 & | & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ + \\ | : 3 \quad \cdot(-1) \end{array} \quad \text{also} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & | & -2 \\ 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix},$$

woraus sich schließlich $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = -2$ und $\xi_3 = 1$ ergibt. Daraus folgt die Lösung

$$v(t) = \begin{pmatrix} -2\exp(t) + \exp(2t) \\ 2\exp(t) + \exp(2t) \\ \exp(2t) \end{pmatrix} \quad \text{für } t \in \mathbb{R}$$

des Anfangswertproblems. $\square$

Aufgabe 4. Man berechne die Lösung $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ des Anfangswertproblems

$$Dv(t) = Av(t) \;\; \text{für } t \in \mathbb{R}, \;\; v(0) = x_0,$$

wobei die Matrix $A \in L(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ und der Anfangswert $x_0 \in \mathbb{R}^3$ durch

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\; \text{und} \;\; x_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

gegeben sind!

Lösung. 1. Die Berechnung der Nullstellen $\mu \in \mathbb{C}$ des charakteristischen Polynoms

$$0 = \begin{vmatrix} 2-\mu & 1 & 3 \\ -1 & -\mu & 2 \\ 0 & 0 & 1-\mu \end{vmatrix} = (1-\mu) \begin{vmatrix} 2-\mu & 1 \\ -1 & -\mu \end{vmatrix} = (1-\mu)(1-(2-\mu)\mu) = (1-\mu)^3$$

der Matrix A führt auf den algebraisch dreifachen Eigenwert $\mu_1 = 1$.

2. Zur Konstruktion eines Fundamentalsystems $\{v_1, v_2, v_3\}$ werden Lösungen der Gleichung $Dv(t) = Av(t)$ für $t \in \mathbb{R}$ in allgemeiner Gestalt

$$\begin{aligned} v_1(t) &= z_{11} \exp(t), \\ v_2(t) &= \big(z_{21} + t z_{22}\big) \exp(t), \\ v_3(t) &= \big(z_{31} + t z_{32} + \tfrac{1}{2} t^2 z_{33}\big) \exp(t) \end{aligned}$$

mit geeigneten Vektoren $z_{\ell r} \in \mathbb{R}^3$ für $\ell \in \{1, 2, 3\}$ und $r \in \{1, \ldots, \ell\}$ gesucht.

2.1. Die Gleichung $Dv_1(t) = Av_1(t)$ für $t \in \mathbb{R}$ liefert das homogene Gleichungssystem $(A - E_3) z_{11} = 0$ zur Bestimmung eines Eigenvektors $z_{11} \in \mathbb{R}^3$ zum Eigenwert $\mu_1 = 1$. Elementare äquivalente Umformungen liefern

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) {\scriptstyle +}, \;\; \text{also} \;\; \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \;\; \text{und} \;\; z_{11} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

als Eigenvektor zum Eigenwert $\mu_1 = 1$, dessen Eigenraum somit eindimensional ist.

2.2. Aus der Gleichung $Dv_2(t) = Av_2(t)$ für $t \in \mathbb{R}$ folgt mit Hilfe eines Koeffizientenvergleichs bzgl. Termen gleicher Ordnung in t die beiden Gleichungssysteme $(A - E_3) z_{22} = 0$ und $(A - E_3) z_{21} = z_{22}$ zur Bestimmung der Vektoren $z_{21}, z_{22} \in \mathbb{R}^3$. Aus Schritt 2.1 ergibt sich eine Lösung $z_{22} = z_{11}$ des ersten Systems. Für das zweite System liefern elementare äquivalente Umformungen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) {\scriptstyle +}, \;\; \text{also} \;\; \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \;\; \text{und} \;\; z_{21} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

als verallgemeinerten Eigenvektor zum Eigenwert $\mu_1 = 1$.

2.3. Aus der Gleichung $Dv_3(t) = Av_3(t)$ für $t \in \mathbb{R}$ erhält man mittels Koeffizientenvergleichs bzgl. Termen gleicher Ordnung in t die drei Gleichungssysteme $(A - E_3)z_{33} = 0$, $(A - E_3)z_{32} = z_{33}$ und $(A - E_3)z_{31} = z_{32}$ zur Bestimmung der Vektoren $z_{31}, z_{32}, z_{33} \in \mathbb{R}^3$. Aus Schritt 2.1 ergibt sich eine Lösung $z_{33} = z_{11}$ des ersten Systems, und nach Schritt 2.2 eine Lösung $z_{32} = z_{21}$ des zweiten Systems. Für das dritte System liefern elementare äquivalente Umformungen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \text{ also } \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \text{ und } z_{31} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

als verallgemeinerten Eigenvektor zum Eigenwert $\mu_1 = 1$.

3. Somit besitzt das Fundamentalsystem $\{v_1, v_2, v_3\}$ der Gleichung $Dv(t) = Av(t)$ für $t \in \mathbb{R}$ die Gestalt

$$v_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp(t), \quad v_2(t) = \begin{pmatrix} 1 + t \\ -t \\ 0 \end{pmatrix} \exp(t), \quad v_3(t) = \begin{pmatrix} -1 + t + \frac{1}{2}t^2 \\ -1 - \frac{1}{2}t^2 \\ 1 \end{pmatrix} \exp(t).$$

Die Lösung $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ des Anfangswertproblems

$$Dv(t) = Av(t) \ \text{ für } t \in \mathbb{R}, \quad v(0) = x_0,$$

läßt durch $v = \xi_1 v_1 + \xi_2 v_2 + \xi_3 v_3$ darstellen, wobei sich die Koordinaten $\xi \in \mathbb{R}^3$ aus der Anfangsbedingung $\xi_1 v_1(0) + \xi_2 v_2(0) + \xi_3 v_3(0) = x_0$ ergeben. Elementare äquivalente Unformungen dieses linearen Gleichungssystems führen auf

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right), \text{ also } \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

und somit $\xi_1 = -3$, $\xi_2 = 4$ und $\xi_3 = 2$. Daraus folgt schließlich die Lösung

$$v(t) = \begin{pmatrix} -1 + 6t + t^2 \\ 1 - 4t - t^2 \\ 2 \end{pmatrix} \exp(t) \ \text{ für } t \in \mathbb{R}$$

des Anfangswertproblems. $\square$

Aufgabe 5. Man berechne die Lösung $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ des Anfangswertproblems

$$Du(t) = Au(t) \ \text{ für } t \in \mathbb{R}, \ \ u(0) = x_0,$$

wobei die Matrix $A \in L(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ und der Anfangswert $x_0 \in \mathbb{R}^3$ durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \ \text{ und } \ x_0 = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben sind!

Lösung. 1. Die Berechnung der Nullstellen $\mu \in \mathbb{C}$ des charakteristischen Polynoms

$$\mathbb{0} = \begin{vmatrix} \mathbb{1} - \mu & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{2} - \mu & -\mathbb{3} \\ \mathbb{1} & \mathbb{3} & \mathbb{2} - \mu \end{vmatrix} = (\mathbb{1} - \mu) \begin{vmatrix} \mathbb{2} - \mu & -\mathbb{3} \\ \mathbb{3} & \mathbb{2} - \mu \end{vmatrix} = (\mathbb{1} - \mu)\big((\mathbb{2} - \mu)^2 + \mathbb{9}\big)$$

der Matrix A führt auf das Paar konjugiert komplexer Eigenwerte $\mu_1 = \mathbb{2} + \mathbb{3}\mathbb{i}$ und $\mu_2 = \overline{\mu}_1 = \mathbb{2} - \mathbb{3}\mathbb{i}$ sowie den reellen Eigenwert $\mu_3 = \mathbb{1}$, woraus sich zunächst die Diagonalisierbarkeit von A ergibt.

2.1. Zur Bestimmung eines Eigenvektors $z_1 \in \mathbb{C}^3$ zum Eigenwert $\mu_1 = \mathbb{2} + \mathbb{3}\mathbb{i}$ wird das lineare Gleichungssystem $(A - \mu_1 E_3) z_1 = \mathbb{0}$ gelöst. Elementare äquivalente Umformungen des Koeffizientenschemas führen auf

$$\begin{pmatrix} -\mathbb{1} - \mathbb{3}\mathbb{i} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & -\mathbb{3}\mathbb{i} & -\mathbb{3} \\ \mathbb{1} & \mathbb{3} & -\mathbb{3}\mathbb{i} \end{pmatrix} \begin{matrix} {\scriptstyle +} \\ {\scriptstyle \cdot(-\mathbb{i})} \\ {\scriptstyle +} \quad {\scriptstyle \cdot(\mathbb{1}+\mathbb{3}\mathbb{i})} \end{matrix} \ , \text{ also } \begin{pmatrix} \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & -\mathbb{3}\mathbb{i} & -\mathbb{3} \\ \mathbb{1} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \end{pmatrix} \ \text{ und } \ z_1 = \begin{pmatrix} \mathbb{0} \\ \mathbb{i} \\ \mathbb{1} \end{pmatrix}$$

als Eigenvektor zu $\mu_1 = \mathbb{2} + \mathbb{3}\mathbb{i}$. Damit ist $z_2 = \overline{z}_1 \in \mathbb{C}^3$ ein Eigenvektor zum konjugiert komplexen Eigenwert $\mu_2 = \overline{\mu}_1 = \mathbb{2} - \mathbb{3}\mathbb{i}$.

2.2. Zur Berechnung eines Eigenvektors $z_3 \in \mathbb{C}^3$ zum Eigenwert $\mu_3 = \mathbb{1}$ wird das lineare Gleichungssystem $(A - \mu_3 E_3) z_3 = \mathbb{0}$ gelöst. Elementare äquivalente Umformungen des Koeffizientenschemas führen auf

$$\begin{pmatrix} \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{1} & -\mathbb{3} \\ \mathbb{1} & \mathbb{3} & \mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ {\scriptstyle \cdot(-\mathbb{3})} \\ {\scriptstyle +} \end{matrix} \ , \text{ also } \begin{pmatrix} \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{1} & -\mathbb{3} \\ \mathbb{1} & \mathbb{0} & \mathbb{10} \end{pmatrix} \ \text{ und somit } \ z_3 = \begin{pmatrix} \mathbb{10} \\ -\mathbb{3} \\ -\mathbb{1} \end{pmatrix}$$

als Eigenvektor zu $\mu_3 = \mathbb{1}$.

3. Ein komplexwertiges Fundamentalsystem $\{v_1, v_2, v_3\}$ von Lösungen der Gleichung $Dv(t) = Av(t)$ ist durch $v_\ell(t) = z_\ell \operatorname{Exp}(\mu_\ell t)$ für $t \in \mathbb{R}$ sowie $\ell \in \{1, 2, 3\}$ gegeben. Wegen $\operatorname{Im} \mu_1 = 3$, $\operatorname{Im} \mu_2 = -3$ und $\operatorname{Im} \mu_3 = 0$ bilden $u_1 = \operatorname{Re} v_1$, $u_2 = \operatorname{Im} v_1$ und $u_3 = v_3$ ein reellwertiges Fundamentalsystem $\{u_1, u_2, u_3\}$ von Lösungen der Gleichung $Du(t) = Au(t)$ für $t \in \mathbb{R}$. Für $t \in \mathbb{R}$ ergibt sich also

$$u_1(t) = \exp(2t)\begin{pmatrix} 0 \\ -\sin 3t \\ \cos 3t \end{pmatrix}, \quad u_2(t) = \exp(2t)\begin{pmatrix} 0 \\ \cos 3t \\ \sin 3t \end{pmatrix}, \quad u_3(t) = \exp(t)\begin{pmatrix} 10 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

4. Somit läßt sich die Lösung $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ des Anfangswertproblems

$$Du(t) = Au(t) \ \text{ für } t \in \mathbb{R}, \quad u(0) = x_0,$$

durch $u = \xi_1 u_1 + \xi_2 u_2 + \xi_3 u_3$ darstellen, wobei sich die Koordinaten $\xi \in \mathbb{R}^3$ aus der Anfangsbedingung $\xi_1 u_1(0) + \xi_2 u_2(0) + \xi_3 u_3(0) = x_0$ ergeben. Elementare äquivalente Unformungen dieses linearen Gleichungssystems führen auf

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 10 & 10 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mid :10 \ \ \cdot 3 \\ \longleftarrow + \\ \longleftarrow + \end{array}, \text{ also } \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

und somit $\xi_1 = 2$, $\xi_2 = 4$ und $\xi_3 = 1$. Daraus folgt schließlich die Lösung

$$u(t) = \begin{pmatrix} 10\exp(t) \\ -2\exp(2t)\sin 3t + 4\exp(2t)\cos 3t - 3\exp(t) \\ 2\exp(2t)\cos 3t + 4\exp(2t)\sin 3t - \exp(t) \end{pmatrix} \quad \text{für } t \in \mathbb{R}$$

des Anfangswertproblems. $\square$

Aufgabe 6. Eine schwere Punktmasse bewegt sich an einer federnden Aufhängung, die im Nullpunkt befestigt ist. Eine Federkraft sucht sie nach dem Nullpunkt, die Schwerkraft hingegen in die Tiefe zu ziehen. Man löse das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} D(mv)(t) &= mg - kx(t), \quad & v(0) &= v_0, \\ Dx(t) &= v(t), & x(0) &= x_0, \end{aligned}$$

für Ort $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ und Geschwindigkeit $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ der Punktmasse, wenn ihre Masse $m > 0$, die Federkonstante $k > 0$ und die Schwerkraft $mg \in \mathbb{R}^3$ sowie Anfangsort $x_0 \in \mathbb{R}^3$ und Anfangsgeschwindigkeit $v_0 \in \mathbb{R}^3$ vorgegeben sind!

Lösung. 1. Das Anfangswertproblem läßt sich in expliziter Form

$$\begin{pmatrix} Dv(t) \\ Dx(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{k}{m}E \\ E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v(t) \\ x(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} v(0) \\ x(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \\ x_0 \end{pmatrix}$$

mit der Blockmatrix

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{k}{m}E \\ E & 0 \end{pmatrix} \in L(\mathbb{R}^6; \mathbb{R}^6) \ \text{ darstellen.}$$

2. Zur Berechnung der Eigenwerte $\mu \in \mathbb{C}$ der Blockmatrix $A_0 \in L(\mathbb{R}^6; \mathbb{R}^6)$ liefert die Determinantengleichung

$$0 = \begin{vmatrix} -\mu E & -\frac{k}{m}E \\ E & -\mu E \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -\big(\mu^2 + \frac{k}{m}\big)E \\ E & -\mu E \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E & \mu E \\ 0 & \big(\mu^2 + \frac{k}{m}\big)E \end{vmatrix} = \big(\mu^2 + \tfrac{k}{m}\big)^3.$$

Neben dem dreifachen Eigenwert $\mu_1 = \lambda\mathbb{i} \in \mathbb{C}$ erhält man den dreifachen konjugiert komplexen Eigenwert $\mu_2 = \overline{\mu}_1 = -\lambda\mathbb{i} \in \mathbb{C}$, wobei $\lambda > 0$ durch $\lambda^2 = \frac{k}{m}$ gegeben ist.

3. Um die zum Eigenwert $\mu_1 = \lambda\mathbb{i} \in \mathbb{C}$ gehörenden Lösungen der homogenen Differentialgleichung zu finden, werden Eigenvektoren $z_1 \in \mathbb{C}^6$ durch Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} -\lambda\mathbb{i}E & -\lambda^2 E \\ E & -\lambda\mathbb{i}E \end{pmatrix} z_1 = 0 \ \text{ und somit } \ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E & -\lambda\mathbb{i}E \end{pmatrix} z_1 = 0$$

bestimmt. Zum Eigenwert $\mu_1 = \lambda\mathbb{i} \in \mathbb{C}$ ergeben sich drei Eigenvektoren $z_{1k} \in \mathbb{C}^6$ und somit zum konjugierten Eigenwert $\mu_2 = \overline{\mu}_1 = -\lambda\mathbb{i} \in \mathbb{C}$ entsprechend die drei konjugierten Eigenvektoren $z_{2\ell} = \overline{z}_{1\ell} \in \mathbb{C}^6$ der Gestalt

$$z_{1\ell} = \begin{pmatrix} \lambda\mathbb{i}e_\ell \\ e_\ell \end{pmatrix} \ \text{ sowie } \ z_{2\ell} = \begin{pmatrix} -\lambda\mathbb{i}e_\ell \\ e_\ell \end{pmatrix} \ \text{ für } \ell \in \{1, 2, 3\}.$$

Daraus ergibt sich für jedes $\ell \in \{1, 2, 3\}$ ein Paar konjugiert komplexer Lösungen $z_{1\ell}\,\mathrm{Exp}(\lambda\mathbb{i}t)$ sowie $z_{2\ell}\,\mathrm{Exp}(-\lambda\mathbb{i}t)$ der homogenen Differentialgleichung.

Bildet man Real- und Imaginärteil $u_{1\ell} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^6$ bzw. $u_{2\ell} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^6$ der komplexen Lösung $z_{1\ell}\,\mathrm{Exp}(\lambda \mathbb{i} t)$ für $\ell \in \{1, 2, 3\}$, so erhält man jeweils zwei reelle Lösungen

$$u_{1\ell}(t) = \begin{pmatrix} -\lambda e_\ell \sin \lambda t \\ e_\ell \cos \lambda t \end{pmatrix} \text{ sowie } u_{2\ell}(t) = \begin{pmatrix} \lambda e_\ell \cos \lambda t \\ e_\ell \sin \lambda t \end{pmatrix} \text{ für } t \in \mathbb{R}$$

der homogenen Differentialgleichung.

4. Damit läßt sich jede Lösung $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^6$ der homogenen Differentialgleichung als Linearkombination

$$u(t) = \begin{pmatrix} \lambda \xi \cos \lambda t - \lambda \eta \sin \lambda t \\ \xi \sin \lambda t + \eta \cos \lambda t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cos \lambda t \cdot E & -\lambda \sin \lambda t \cdot E \\ \sin \lambda t \cdot E & \cos \lambda t \cdot E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

von sechs linear unabhängigen Lösungen mit den Koordinaten $\xi, \eta \in \mathbb{R}^3$ darstellen.

Wird von den Koordinaten $\xi, \eta \in \mathbb{R}^3$ zum Anfangszeitpunkt $t_0 = 0$ die Bedingung

$$u(0) = \begin{pmatrix} \lambda E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \text{ also } \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} u(0) = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

erfüllt, so ergibt sich für die Hauptfundamentalmatrix und ihre Inverse

$$U(t) = \begin{pmatrix} \cos \lambda t \cdot E & -\lambda \sin \lambda t \cdot E \\ \frac{1}{\lambda} \sin \lambda t \cdot E & \cos \lambda t \cdot E \end{pmatrix} \text{ und } U(t)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \lambda t \cdot E & \lambda \sin \lambda t \cdot E \\ -\frac{1}{\lambda} \sin \lambda t \cdot E & \cos \lambda t \cdot E \end{pmatrix}.$$

5. Daraus folgt einerseits die Lösung

$$u(t) = U(t) \begin{pmatrix} v_0 \\ x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \cos \lambda t - \lambda x_0 \sin \lambda t \\ \frac{1}{\lambda} v_0 \sin \lambda t + x_0 \cos \lambda t \end{pmatrix} \text{ mit } u(0) = \begin{pmatrix} v_0 \\ x_0 \end{pmatrix}$$

für das homogene Anfangswertproblems $Du(t) = A_0 u(t)$ für $t \in \mathbb{R}$. Andererseits ist

$$\begin{aligned} u_0(t) &= U(t) \int_0^t U(s)^{-1} \begin{pmatrix} g \\ 0 \end{pmatrix} ds = U(t) \int_0^t \frac{g}{\lambda} \begin{pmatrix} \lambda \cos \lambda s \\ -\sin \lambda s \end{pmatrix} ds \\ &= \frac{g}{\lambda^2} \cdot U(t) \begin{pmatrix} \lambda \sin \lambda t \\ \cos \lambda t - 1 \end{pmatrix} = \frac{g}{\lambda^2} \begin{pmatrix} \lambda \sin \lambda t \\ 1 - \cos \lambda t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

die Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems

$$Du_0(t) = A_0 u_0(t) + \begin{pmatrix} g \\ 0 \end{pmatrix} \text{ für } t \in \mathbb{R}, \quad u_0(0) = 0.$$

Schließlich erhält man wegen $\lambda^2 = \frac{k}{m}$ insgesamt die Lösung

$$\begin{pmatrix} v(t) \\ x(t) \end{pmatrix} = u(t) + u_0(t) = \begin{pmatrix} v_0 \cos \lambda t - \lambda \bigl(x_0 - \frac{mg}{k}\bigr) \sin \lambda t \\ \frac{mg}{k} + \frac{1}{\lambda} v_0 \sin \lambda t + \bigl(x_0 - \frac{mg}{k}\bigr) \cos \lambda t \end{pmatrix}.$$

Interpretation. 1. Die Punktmasse bewegt sich im Falle $v_0 \neq 0$ und $x_0 \neq \frac{mg}{k}$ auf einer elliptischen Bahn um den Mittelpunkt $\frac{mg}{k} \in \mathbb{R}^3$ in der affinen Hyperebene

$$\left\{\tfrac{mg}{k} + s_1 v_0 + s_2\left(x_0 - \tfrac{mg}{k}\right) \in \mathbb{R}^3 \mid s_1, s_2 \in \mathbb{R}\right\}.$$

2. Im Falle $v_0 = 0$ und $x_0 \neq \frac{mg}{k}$ schwingt die Punktmasse auf der Geraden

$$\left\{\tfrac{mg}{k} + s\left(x_0 - \tfrac{mg}{k}\right) \in \mathbb{R}^3 \mid s \in \mathbb{R}\right\}.$$

3. Gilt $v_0 \neq 0$ und $x_0 = \frac{mg}{k}$, so schwingt die Punktmasse auf der Geraden

$$\left\{x_0 + s v_0 \in \mathbb{R}^3 \mid s \in \mathbb{R}\right\}.$$

4. Im Falle $v_0 = 0$ und $x_0 = \frac{mg}{k}$ verharrt die Punktmasse im Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^3$. $\square$

Aufgabe 7. Ein elektrisch geladenes Teilchen der Masse $m > 0$ und der Ladung $q \in \mathbb{R}$ bewegt sich in einem konstanten Magnetfeld $b \in \mathbb{R}^3$ unter dem Einfluß der Lorentz-Kraft. Man bestimme die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} D(mv)(t) &= qv(t) \times b, & v(0) &= v_0, \\ Dx(t) &= v(t), & x(0) &= x_0, \end{aligned}$$

für Ort $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ und Geschwindigkeit $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ der Punktmasse, wenn der Anfangsort $x_0 \in \mathbb{R}^3$ und die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 \in \mathbb{R}^3$ vorgegeben sind!

Lösung. 1. Der lineare Operator $B \in L(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$, der jedem Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ das Vektorprodukt $v \times b \in \mathbb{R}^3$ mit dem fixierten Vektor $b \in \mathbb{R}^3$ zuordnet, kann mit einer antisymmetrischen Matrix identifiziert werden:

$$Bv = v \times b = \begin{pmatrix} v_2b_3 - v_3b_2 \\ v_3b_1 - v_1b_3 \\ v_1b_2 - v_2b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b_3 & -b_2 \\ -b_3 & 0 & b_1 \\ b_2 & -b_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

Mit $A_0 = \frac{q}{m} B \in L(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ wird das Anfangswertproblem in die explizite Form

$$\begin{aligned} Dv(t) &= A_0 v(t), & v(0) &= v_0, \\ Dx(t) &= v(t), & x(0) &= x_0, \end{aligned}$$

gebracht. Offenbar kann man zuerst das Teilproblem für die Geschwindigkeit v und danach das zweite Teilproblem für den Ort x durch eine einfache Integration

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v(s)\, ds \quad \text{für } t \in \mathbb{R} \text{ lösen.}$$

Im Falle des ungeladenen Teilchens oder eines nicht vorhandenen Magnetfelds hätte man $q = 0$ bzw. $b = 0$, woraus jeweils $A_0 = 0$ und somit eine gleichförmige Bewegung $x(t) = x_0 + v_0 t$ wegen $v(t) = v_0$ folgen würde. Im Falle $v_0 = 0$ ruht das Teilchen, denn dann lösen $x(t) = x_0$ und $v(t) = 0$ das Problem. Im weiteren Verlauf soll der interessante Fall $q \neq 0$, $b \neq 0$ und $v_0 \neq 0$ betrachtet werden.

2. Die Auswertung der Determinante $\det(A_0 - \mu E) = 0$ zur Berechnung der Eigenwerte $\mu \in \mathbb{C}$ der Matrix $A_0 \in L(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ liefert

$$0 = \begin{vmatrix} -\mu & \frac{q}{m}b_3 & -\frac{q}{m}b_2 \\ -\frac{q}{m}b_3 & -\mu & \frac{q}{m}b_1 \\ \frac{q}{m}b_2 & -\frac{q}{m}b_1 & -\mu \end{vmatrix} = -\mu^3 - (\tfrac{q}{m})^2 \|b\|^2 \mu = -\mu\big(\mu^2 + (\tfrac{q}{m})^2 \|b\|^2\big).$$

Man erhält neben dem Eigenwert $\mu_1 = 0$ die beiden konjugiert komplexen Eigenwerte $\mu_2 = \lambda \mathbb{i} \in \mathbb{C}$ sowie $\mu_3 = \overline{\mu}_2 = -\lambda \mathbb{i} \in \mathbb{C}$, wobei $\lambda = \frac{q}{m}\|b\| \neq 0$ gilt.

3. Zur Ermittlung der zugehörigen Eigenvektoren wird zunächst der normierte Vektor $u_1 = \frac{b}{\|b\|} \in \mathbb{R}^3$ eingeführt und durch zwei Vektoren u_2, $u_3 \in \mathbb{R}^3$ zu einem Orthonormalsystem $\{u_1, u_2, u_3\}$ des $\mathbb{R}^3$ mit $\det(u_1, u_2, u_3) = 1$ ergänzt.

3.1. Der Vektor $z_1 = u_1 \in \mathbb{R}^3$ erfüllt die Gleichung $A_0 z_1 = \lambda z_1 \times u_1 = 0$. Somit ist $z_1 = u_1$ Eigenvektor zum Eigenwert $\mu_1 = 0$ und damit auch Lösung des ersten Teilsystems der Differentialgleichungen.

3.2. Zu $\mu_2 = \lambda \mathbb{i} \in \mathbb{C}$ wird ein Eigenvektor $z_2 = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 \in \mathbb{C}^3$ mit noch unbekannten komplexen Koordinaten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$ gesucht, der die Gleichung

$$0 = A_0 z_2 - \mu_2 z_2 = \lambda z_2 \times u_1 - \lambda \mathbb{i} z_2 = \lambda(z_2 \times u_1 - \mathbb{i} z_2)$$

erfüllt. Wegen $\lambda \neq 0$ folgt daraus die Gleichung

$$0 = z_2 \times u_1 - \mathbb{i} z_2 = \alpha_2 u_2 \times u_1 + \alpha_3 u_3 \times u_1 - \alpha_1 \mathbb{i} u_1 - \alpha_2 \mathbb{i} u_2 - \alpha_3 \mathbb{i} u_3.$$

Das Skalarprodukt von $z_2 \times u_1 - \mathbb{i} z_2$ und $u_1 \in \mathbb{R}^3$ liefert somit

$$0 = \alpha_2(u_2 \times u_1|u_1) + \alpha_3(u_3 \times u_1|u_1) - \alpha_1 \mathbb{i}(u_1|u_1) - \alpha_2 \mathbb{i}(u_2|u_1) - \alpha_3 \mathbb{i}(u_3|u_1) = -\alpha_1 \mathbb{i}$$

und somit $\alpha_1 = 0$. Das Skalarprodukt von $z_2 \times u_1 - \mathbb{i} z_2$ und $u_2 \in \mathbb{R}^3$ bringt

$$0 = \alpha_2(u_2 \times u_1|u_2) + \alpha_3(u_3 \times u_1|u_2) - \alpha_1 \mathbb{i}(u_1|u_2) - \alpha_2 \mathbb{i}(u_2|u_2) - \mathbb{i}\alpha_3(u_3|u_2) = \alpha_3 - \alpha_2 \mathbb{i}$$

und damit $\alpha_3 = \alpha_2 \mathbb{i}$. Das Skalarprodukt von $z_2 \times u_1 - \mathbb{i} z_2$ und $u_3 \in \mathbb{R}^3$ liefert

$$0 = \alpha_2(u_2 \times u_1|u_3) + \alpha_3(u_3 \times u_1|u_3) - \alpha_1 \mathbb{i}(u_1|u_3) - \alpha_2 \mathbb{i}(u_2|u_3) - \alpha_3 \mathbb{i}(u_3|u_3) = -\alpha_2 - \alpha_3 \mathbb{i}$$

und somit ebenfalls $\alpha_2 = -\alpha_3 \mathbb{i}$. Daher kann man $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = \mathbb{i}$ wählen. Man erhält den Eigenvektor $z_2 = u_2 + \mathbb{i} u_3 \in \mathbb{C}^3$ zum Eigenwert $\mu_2 = \lambda \mathbb{i} \in \mathbb{C}$ und den konjugiert komplexen Eigenvektor $z_3 = \overline{z}_2 = u_2 - \mathbb{i} u_3 \in \mathbb{C}^3$ zum konjugiert komplexen Eigenwert $\mu_3 = \overline{\mu}_2 = -\lambda \mathbb{i}$. Daraus ergeben sich die beiden konjugiert komplexen Lösungen $(u_2 + \mathbb{i} u_3)\,\mathrm{Exp}(\lambda \mathbb{i} t)$ sowie $(u_2 - \mathbb{i} u_3)\,\mathrm{Exp}(-\lambda \mathbb{i} t)$ des ersten Teilsystems der Differentialgleichungen.

Real- und Imaginärteil der komplexen Lösung $(u_2 + \mathbb{i} u_3)\,\mathrm{Exp}(\lambda \mathbb{i} t)$ liefern

$$u_2 \cos \lambda t - u_3 \sin \lambda t \quad \text{bzw.} \quad u_2 \sin \lambda t + u_3 \cos \lambda t \quad \text{für } t \in \mathbb{R}$$

als reelle Lösungen des ersten Teilsystems der Differentialgleichungen.

4. Damit läßt sich jede Lösung $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ des ersten Teilsystems der Differentialgleichungen als Linearkombination

$$v(t) = \xi_1 u_1 + \xi_2\big(u_2 \cos \lambda t - u_3 \sin \lambda t\big) + \xi_3\big(u_2 \sin \lambda t + u_3 \cos \lambda t\big) \quad \text{für } t \in \mathbb{R}$$

von drei linear unabhängigen Lösungen mit den Koordinaten $\xi \in \mathbb{R}^3$ darstellen. Um die Anfangsbedingungen für $t_0 = 0$ zu erfüllen, wird das lineare Gleichungssystem $\xi_1 u_1 + \xi_2 u_2 + \xi_3 u_3 = v_0$ gelöst: Da $\{u_1, u_2, u_3\}$ ein Orthonormalsystem des $\mathbb{R}^3$ ist, ergeben sich sofort die Koordinaten $\xi_1 = (u_1|v_0)$, $\xi_2 = (u_2|v_0)$, $\xi_3 = (u_3|v_0)$.

5. Für jedes $t \in \mathbb{R}$ liefert die Integration

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v(s)\,ds$$

die Lösung des zweiten Teilproblems für den Ort

$$x(t) = x_0 + \xi_1 u_1 t + \xi_2 \frac{u_2 \sin \lambda t + u_3(\cos \lambda t - 1)}{\lambda} + \xi_3 \frac{u_3 \sin \lambda t + u_2(1 - \cos \lambda t)}{\lambda}.$$

Interpretation. 1. Sind Magnetfeld b und Anfangsgeschwindigkeit v_0 parallel, dann gelten $\xi_1 u_1 = v_0$ und $\xi_2 = \xi_3 = 0$, und das Teilchen bewegt sich gleichförmig gemäß $x(t) = x_0 + v_0 t$ in Richtung v_0, als ob es keine Ladung hätte oder das Magnetfeld nicht vorhanden wäre.

2. Anderenfalls gilt $\xi_0 = \sqrt{\xi_2^2 + \xi_3^2} > 0$, und man kann einen Phase $\varphi \in [0, 2\pi]$ festlegen, so daß $\xi_2 = \xi_0 \cos\varphi$ und $\xi_3 = \xi_0 \sin\varphi$ gilt. Durch eine Umgruppierung der Terme erhält man die Darstellung

$$x(t) = x_0 + \xi_1 u_1 t + \frac{\xi_3 u_2 - \xi_2 u_3}{\lambda} + \frac{\xi_2 \sin \lambda t - \xi_3 \cos \lambda t}{\lambda} u_2 + \frac{\xi_3 \sin \lambda t + \xi_2 \cos \lambda t}{\lambda} u_3$$

der Lösung. Die Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \xi_2 \sin \lambda t - \xi_3 \cos \lambda t &= \xi_0 \sin(\lambda t - \varphi) \\ \xi_3 \sin \lambda t + \xi_2 \cos \lambda t &= \xi_0 \cos(\lambda t - \varphi) \end{aligned}$$

liefern demnach schließlich

$$x(t) = x_0 + \xi_1 u_1 t + \frac{\xi_3 u_2 - \xi_2 u_3}{\lambda} + \frac{\xi_0 \sin(\lambda t - \varphi)}{\lambda} u_2 + \frac{\xi_0 \cos(\lambda t - \varphi)}{\lambda} u_3.$$

2.1. Im Falle $\xi_1 \neq 0$ windet sich das Teilchen auf einer Schraubenlinie mit dem Radius $\frac{\xi_0}{\lambda}$ und der Ganghöhe $\frac{2\pi\xi_1}{\lambda}$ um eine zum Magnetfeld parallele Achse

$$\left\{x_0 + s_1 u_1 + \tfrac{\xi_3}{\lambda} u_2 - \tfrac{\xi_2}{\lambda} u_3 \in \mathbb{R}^3 \mid s_1 \in \mathbb{R}\right\}$$

herum. Je stärker das Magnetfeld oder je höher die Ladung des Teilchens, um so kleiner ist der Radius; je größer die Masse oder die Anfangsgeschwindigkeit des Teilchens, um so größer ist der Radius.

2.2. Steht die Anfangsgeschwindigkeit v_0 senkrecht auf dem Magnetfeld b, dann ergibt sich $\xi_1 = 0$ und damit $\xi_0 = \|v_0\| > 0$, und das Teilchen bewegt sich in einer zum Magnetfeld senkrechten affinen Hyperebene

$$\left\{x_0 + s_2 u_2 + s_3 u_3 \in \mathbb{R}^3 \mid s_2, s_3 \in \mathbb{R}\right\}$$

auf einer Kreisbahn mit dem Radius $\frac{\xi_0}{\lambda}$ und dem Mittelpunkt $x_0 + \frac{\xi_3}{\lambda} u_2 - \frac{\xi_2}{\lambda} u_3 \in \mathbb{R}^3$ um die oben genannte Achse des Magnetfelds. $\square$