Übungsaufgaben 13

Anfangswertprobleme zweiter Ordnung

Aufgabe 1. Man bestimme den linearen Raum aller zweimal stetig differenzierbaren Lösungen $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ der Differentialgleichung

$$D^2 v(t) = BDv(t) + Av(t) \quad \text{für } t \in \mathbb{R},$$

wobei die symmetrischen Matrizen $A, B \in L(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ durch

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -4 \\ 2 & -7 & -2 \\ -4 & -2 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

gegeben sind! ⑧

Lösung. 1. Die charakteristische Gleichung $\det(A + \mu B - \mu^2 E_3) = 0$ der homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung hat die Gestalt

$$\begin{aligned}
0 &= \begin{vmatrix} -4 + 5\mu - \mu^2 & 2 - 2\mu & -4 + 4\mu \\ 2 - 2\mu & -7 + 8\mu - \mu^2 & -2 + 2\mu \\ -4 + 4\mu & -2 + 2\mu & -4 + 5\mu - \mu^2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} -8 + 9\mu - \mu^2 & 16 - 18\mu + 2\mu^2 & 0 \\ 2 - 2\mu & -7 + 8\mu - \mu^2 & -2 + 2\mu \\ -8 + 9\mu - \mu^2 & 0 & -8 + 9\mu - \mu^2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} -8 + 9\mu - \mu^2 & 0 & 0 \\ 2 - 2\mu & 1 - \mu^2 & -2 + 2\mu \\ -8 + 9\mu - \mu^2 & 0 & -8 + 9\mu - \mu^2 \end{vmatrix} = (1 - \mu^2)(\mu^2 - 9\mu + 8)^2
\end{aligned}$$

und besitzt folglich drei verschiedene Nullstellen $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = -1$ und $\mu_3 = 8$ mit den algebraischen Vielfachheiten $m_1 = 3$, $m_2 = 1$ und $m_3 = 2$.

2. Aufgrund der Symmetrie der Matrizen A und B hat der Kern der Abbildung $A + \mu_\ell B - \mu_\ell^2 E_3 \in L(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ für jedes $\ell \in \{1, 2, 3\}$ die volle Dimension m_ℓ. Für die Indizes $\ell \in \{1, 2, 3\}$ und $r \in \{1, \ldots, m_\ell\}$ werden die Lösungen $z_{\ell r} \in \mathbb{R}^3$ des Gleichungssystems $\big(A + \mu_\ell B - \mu_\ell^2 E_3\big) z_{\ell r} = 0$ berechnet:

Im Falle $\mu_1 = 1$ erhält man die Nullmatrix als Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und somit } z_{11} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad z_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad z_{13} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

als linear unabhängige Lösungen des Gleichungssystems zu $\mu_1 = 1$.

Für $\mu_2 = -1$ liefern elementare Umformungen der Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} -10 & 4 & -8 \\ 4 & -16 & -4 \\ -8 & -4 & -10 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot 4 \\ + \\ + \end{array} \quad \text{zunächst} \quad \begin{pmatrix} -10 & 4 & -8 \\ -36 & 0 & -36 \\ -18 & 0 & -18 \end{pmatrix} \begin{array}{l} + \\ \mid : (-36) \quad \cdot 10 \\ \mid : 18 \quad + \end{array}$$

und somit

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad z_{21} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

als Lösung des Gleichungssystems zu $\mu_2 = -1$.

Für $\mu_3 = 8$ gelangt man durch elementare Umformungen der Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} -28 & -14 & 28 \\ -14 & -7 & 14 \\ 28 & 14 & -28 \end{pmatrix} \begin{array}{l} + \\ \cdot (-2) \quad \cdot 2 \\ + \end{array} \quad \text{zunächst zu} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -14 & -7 & 14 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \mid : 7 \\ \\ \end{array}$$

und somit zu

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad \text{Also sind} \quad z_{31} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad z_{32} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

linear unabhängige Lösungen des Gleichungssystems zu $\mu_3 = 8$.

3. Somit besitzt die Gleichung $D^2 v(t) = BDv(t) + Av(t)$ für $t \in \mathbb{R}$ sechs linear unabhängige Lösungen der Gestalt

$$v_{11}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \exp(t), \qquad v_{12}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp(t), \quad v_{13}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \exp(t),$$

$$v_{21}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \exp(-t), \quad v_{31}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \exp(8t), \quad v_{31}(t) = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \exp(8t)$$

und somit das Fundamentalsystem $\{v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{21}, v_{31}, v_{32}\}$. $\square$

Aufgabe 2. Sei $\lambda > 0$ ein vorgegebene reelle Konstante. Man bestimme für jeden reellen Parameter $\delta > 0$ die zweimal stetig differenzierbare Lösung $u_\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des inhomogenen Anfangswertproblems

$$D^2 u_\delta(t) + \lambda^2 u_\delta(t) = \sin \delta t \quad \text{für } t \in \mathbb{R}, \quad u_\delta(0) = 0, \quad Du_\delta(0) = 0$$

ungedämpfter elastischer Schwingungen mit periodischer Erregung und unterscheide dabei den Fall $\delta \neq \lambda$ vom Fall $\delta = \lambda$ der *Resonanz!* In welchem Fall ist die Lösung beschränkt bzw. unbeschränkt? ⑥

Lösung. 1. Die homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\text{(H)} \qquad D^2 v(t) + \lambda^2 v(t) = 0 \quad \text{für } t \in \mathbb{R}$$

hat die charakteristische Gleichung $\mu^2 + \lambda^2 = 0$ und somit die beiden konjugiert komplexen Lösungen $\mu_1 = \lambda \mathbb{i} \in \mathbb{C}$ sowie $\mu_2 = \overline{\mu}_1 = -\lambda \mathbb{i} \in \mathbb{C}$. Daraus ergibt sich das Fundamentalsystem der Lösungen $v_1(t) = \cos \lambda t$ und $v_2(t) = \sin \lambda t$ von (H). Für die Wronski-Matrix $W : \mathbb{R} \to L(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ und ihre Inverse erhält man

$$W(t) = \begin{pmatrix} \cos \lambda t & \sin \lambda t \\ -\lambda \sin \lambda t & \lambda \cos \lambda t \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad W(t)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} \lambda \cos \lambda t & -\sin \lambda t \\ \lambda \sin \lambda t & \cos \lambda t \end{pmatrix} \quad \text{für } t \in \mathbb{R}.$$

2. Somit ergibt sich für das inhomogene Anfangswertproblem

$$D^2 u_\delta(t) + \lambda^2 u_\delta(t) = \sin \delta t \quad \text{für } t \in \mathbb{R}, \quad u_\delta(0) = 0, \quad Du_\delta(0) = 0$$

für jedes $\delta > 0$ und $t \in \mathbb{R}$ mit Hilfe der Additionstheoreme die Lösung

$$u_\delta(t) = \big(\cos \lambda t, \sin \lambda t\big) \int_0^t \frac{\sin(\delta s)}{\lambda} \begin{pmatrix} -\sin \lambda s \\ \cos \lambda s \end{pmatrix} ds = \frac{1}{\lambda} \int_0^t \sin \delta s \cdot \sin \lambda (t-s)\, ds$$

$$= \frac{1}{2\lambda} \int_0^t \big(\cos((\lambda + \delta)s - \lambda t) - \cos((\lambda - \delta)s - \lambda t)\big)\, ds.$$

2.1. Im Falle $\delta \neq \lambda$ liefert die Integration

$$u_\delta(t) = \frac{\sin \lambda t - \sin \delta t}{\delta^2 - \lambda^2} \quad \text{für } t \in \mathbb{R}$$

und somit eine *beschränkte* Lösung $u_\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems.

2.2. Im Falle $\delta = \lambda$ der *Resonanz* erhält man durch Integration

$$u_\lambda(t) = -\frac{t \cos \lambda t}{2\lambda} \quad \text{für } t \in \mathbb{R}$$

und damit eine *unbeschränkte* Lösung $u_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems. □

Aufgabe 3. 1. Man bestimme für jeden Parameter $\delta \in \mathbb{R}$ die zweimal stetig differenzierbare Lösung $u_\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des homogenen Anfangswertproblems

$$D^2 u_\delta(t) = 4Du_\delta(t) - (4-\delta^2)u_\delta(t) \quad \text{für } t \in \mathbb{R}, \quad u_\delta(0) = 2, \quad Du_\delta(0) = 2,$$

wobei die beiden Fälle $\delta = 0$ und $\delta \neq 0$ unterschieden werden sollen!

2. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ beliebig vorgegeben. Man zeige, daß die Beziehung

$$\lim_{\delta \to 0} \max_{t \in [a,b]} |u_\delta(t) - u_0(t)| = 0$$

der gleichmäßigen Konvergenz von (u_δ) gegen u_0 auf dem Intervall $[a, b]$ gilt! ⑥

Lösung. 1. Die homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung hat die charakteristische Gleichung $\lambda^2 - 4\lambda + (4 - \delta^2) = 0$.

1.1. Im Falle $\delta = 0$ hat die charakteristische Gleichung $0 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$ die Lösung $\lambda_1 = 2$ der algebraischen Vielfachheit $m_1 = 2$. Somit existieren Koordinaten $\xi \in \mathbb{R}^2$, so daß die Lösung $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems die Gestalt

$$u_0(t) = (\xi_1 + \xi_2 t)\exp(2t) \quad \text{für } t \in \mathbb{R}$$

besitzt, woraus $Du_0(t) = (2\xi_1 + \xi_2 + 2\xi_2 t)\exp(2t)$ folgt. Die Anfangsbedingungen $u_0(0) = 2$ und $Du_0(0) = 2$ liefern $\xi_1 = 2$ und $2\xi_1 + \xi_2 = 2$, also $\xi_2 = -2$.

1.2. Im Falle $\delta \neq 0$ hat die charakteristische Gleichung

$$0 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 - \delta^2 = (\lambda - 2)^2 - \delta^2 = (\lambda - 2 - \delta)(\lambda - 2 + \delta)$$

zwei *verschiedene* Lösungen $\lambda_1 = 2 + \delta$ und $\lambda_2 = 2 - \delta$. Es gibt also Koordinaten $x \in \mathbb{R}^2$, so daß die Lösung $u_\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems die Form

$$u_\delta(t) = x_1 \exp(2t + \delta t) + x_2 \exp(2t - \delta t) \quad \text{für } t \in \mathbb{R}$$

hat, woraus sich $Du_\delta(t) = (2+\delta)x_1 \exp(2t + \delta t) + (2-\delta)x_2 \exp(2t - \delta t)$ ergibt. Aus den Anfangsbedingungen $u_\delta(0) = 2$ und $Du_\delta(0) = 2$ folgt $x_1 + x_2 = 2$ sowie ferner $(2 + \delta)x_1 + (2 - \delta)x_2 = 2$, also $x_1 = \frac{\delta - 1}{\delta}$ und $x_2 = \frac{\delta+1}{\delta}$.

2. Aufgrund der Eigenschaften der Exponentialreihe ergibt sich für die Differenz

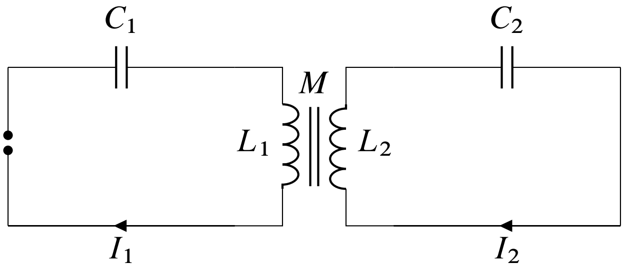
$$u_\delta(t) - u_0(t) = \left(\frac{\delta - 1}{\delta}\exp(\delta t) + \frac{\delta + 1}{\delta}\exp(-\delta t) - (2 - 2t)\right)\exp(2t)$$

beider Lösungen für alle $t, \delta \in \mathbb{R}$ mit $0 < |\delta| < 1$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} |u_\delta(t) - u_0(t)|\exp(-2t) &= \left| \frac{\delta - 1}{\delta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\delta t)^k}{k!} + \frac{\delta + 1}{\delta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\delta t)^k}{k!} - 2 + 2t \right| \\ &= \left| \frac{\delta - 1}{\delta} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\delta t)^k}{k!} + \frac{\delta + 1}{\delta} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-\delta t)^k}{k!} \right| \leq 4|\delta| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|t|^k}{k!} \end{aligned}$$

und somit $\max_{t \in [a,b]} |u_\delta(t) - u_0(t)| \leq 4|\delta| \max_{t \in [a,b]} \exp(3|t|)$, woraus schließlich die gleichmäßige Konvergenz $\lim_{\delta \to 0} \max_{t \in [a,b]} |u_\delta(t) - u_0(t)| = 0$ folgt. □

Aufgabe 4. In einem anfangs stromlosen Schwingkreis werde ein auf $U_0 = 70\,\mathrm{V}$ geladener Kondensator $C_1 = 2\,\mathrm{mF}$ (durch eine Funkenstrecke) über die Induktionsspule $L_1 = 50\,\mathrm{mH}$ entladen. Dadurch entstehen elektromagnetische Schwingungen im ersten Schwingkreis, die in der benachbarten Induktionsspule $L_2 = 1250\,\mathrm{mH}$ und dem ungeladenen Kondensator $C_2 = 80\,\mu\mathrm{F}$ eines anfangs stromlosen zweiten Schwingkreises vermöge der gegenseitigen Induktivität $M = 240\,\mathrm{mH}$ beider Spulen Schwingungen erregen. Der Ohmsche Widerstand bleibe unberücksichtigt.



Man löse das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} DI_1(t) \\ DI_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \end{pmatrix} \quad \text{für } t \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} I_1(0) \\ I_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} DU_1(t) \\ DU_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1(t) \\ I_2(t) \end{pmatrix} \quad \text{für } t \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} U_1(0) \\ U_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

für die Ströme $I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ in den gekoppelten Schwingkreisen und die Spannungen $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ an den Kondensatoren, wenn die Anfangsbedingung $U_0 = 70\,\mathrm{V}$ vorgegeben ist!

Lösung. 1. Das gegebene System der Differentialgleichungen erster Ordnung kann in ein System zweiter Ordnung für die Spannungen umgeformt werden. Durch Differentiation des zweiten Teilsystems nach der Zeit ergibt sich zunächst

$$\begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D^2U_1(t) \\ D^2U_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} DI_1(t) \\ DI_2(t) \end{pmatrix}.$$

Die Multiplikation mit dem Matrixprodukt

$$\begin{pmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in L(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$$

liefert damit

$$\begin{pmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D^2U_1(t) \\ D^2U_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} DI_1(t) \\ DI_2(t) \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe des ersten Teilsystems der Differentialgleichungen erhält man

$$\begin{pmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D^2U_1(t) \\ D^2U_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \end{pmatrix}.$$

Wegen $L_1L_2 - M^2 > 0$ kann man mit der Inversen

$$\frac{1}{L_1L_2 - M^2} \begin{pmatrix} L_2 & -M \\ -M & L_1 \end{pmatrix} \in L(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2) \quad \text{von} \quad \begin{pmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{pmatrix} \in L(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)$$

multiplizieren und bekommt

$$\begin{pmatrix} -C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D^2U_1(t) \\ D^2U_2(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{L_1L_2 - M^2} \begin{pmatrix} L_2 & M \\ -M & -L_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \end{pmatrix}.$$

Schließlich folgt daraus aufgrund der Anfangsbedingungen $I_1^\circ = 0$, $I_2^\circ = 0$ das Anfangswertproblem zweiter Ordnung

$$\begin{pmatrix} D^2U_1(t) \\ D^2U_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_{11}^2 & \alpha_{12}^2 \\ \alpha_{21}^2 & \alpha_{22}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} U_1(0) \\ U_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} DU_1(0) \\ DU_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

für die Spannungen, wobei die Frequenzen $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22} > 0$ durch

$$\alpha_{11}^2 = \frac{L_2}{(L_1L_2 - M^2)\, C_1}, \quad \alpha_{12}^2 = \frac{M}{(L_1L_2 - M^2)\, C_1},$$
$$\alpha_{21}^2 = \frac{M}{(L_1L_2 - M^2)\, C_2}, \quad \alpha_{22}^2 = \frac{L_1}{(L_1L_2 - M^2)\, C_2},$$

gegeben sind. Für die Systemmatrix

$$A_0 = \begin{pmatrix} \alpha_{11}^2 & \alpha_{12}^2 \\ \alpha_{21}^2 & \alpha_{22}^2 \end{pmatrix} \in L(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2) \quad \text{gilt} \quad \det(A_0) = \frac{1}{(L_1L_2 - M^2)\, C_1C_2} > 0.$$

2. Für die charakteristische Gleichung

$$0 = \det\big(A_0 + \mu^2 E_2\big) = \mu^4 + \big(\alpha_{11}^2 + \alpha_{22}^2\big)\mu^2 + \big(\alpha_{11}^2\alpha_{22}^2 - \alpha_{12}^2\alpha_{21}^2\big).$$

der Differentialgleichung besitzt wegen der Beziehung

$$\tfrac{1}{4}\big(\alpha_{11}^2 + \alpha_{22}^2\big)^2 > \tfrac{1}{4}\big(\alpha_{11}^2 + \alpha_{22}^2\big)^2 - \big(\alpha_{11}^2\alpha_{22}^2 - \alpha_{12}^2\alpha_{21}^2\big) = \tfrac{1}{4}\big(\alpha_{11}^2 - \alpha_{22}^2\big)^2 + \alpha_{12}^2\alpha_{21}^2 > 0$$

die Lösungen $\mu_1 = \mathbb{i}\omega_1$ und $\overline{\mu}_1 = -\mathbb{i}\omega_1$ sowie $\mu_2 = \mathbb{i}\omega_2$ und $\overline{\mu}_2 = -\mathbb{i}\omega_2$, welche durch die beiden verschiedenen Frequenzen $\omega_1, \omega_2 > 0$ vermöge

$$\omega_1^2 = \tfrac{1}{2}\big(\alpha_{11}^2 + \alpha_{22}^2\big) - \sqrt{\tfrac{1}{4}\big(\alpha_{11}^2 - \alpha_{22}^2\big)^2 + \alpha_{12}^2\alpha_{21}^2} > 0,$$
$$\omega_2^2 = \tfrac{1}{2}\big(\alpha_{11}^2 + \alpha_{22}^2\big) + \sqrt{\tfrac{1}{4}\big(\alpha_{11}^2 - \alpha_{22}^2\big)^2 + \alpha_{12}^2\alpha_{21}^2} > 0$$

bestimmt werden.

3. Für $\mu_1 = \mathbb{i}\omega_1$ erhält man als Lösung $z_1 \in \mathbb{C}^2$ des linearen Gleichungssystems

$$\big(A_0 + \mu_1^2 E_2\big)z_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{11}^2 - \omega_1^2 & \alpha_{12}^2 \\ \alpha_{21}^2 & \alpha_{22}^2 - \omega_1^2 \end{pmatrix} z_1 = 0 \text{ sogleich } z_1 = \begin{pmatrix} -\alpha_{12}^2 \\ \alpha_{11}^2 - \omega_1^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

aufgrund der Beziehung $\big(\omega_1^2 - \alpha_{11}^2\big)\big(\omega_1^2 - \alpha_{22}^2\big) = \alpha_{12}^2\alpha_{21}^2$. Daraus ergeben sich die konjugiert komplexen Lösungen $z_1 \operatorname{Exp}(\mathbb{i}\omega_1 t)$ und $z_1 \operatorname{Exp}(-\mathbb{i}\omega_1 t)$ der Differentialgleichung. Bildet man Real- und Imaginärteil der von $z_1 \operatorname{Exp}(\mathbb{i}\omega_1 t)$, so erhält man zwei *reelle* Lösungen $z_1 \cos\omega_1 t$ und $z_1 \sin\omega_1 t$ der Differentialgleichung.

Für $\mu_2 = \mathbb{i}\omega_2$ ergibt sich als Lösung $z_1 \in \mathbb{C}^2$ des linearen Gleichungssystems

$$\big(A_0 + \mu_2^2 E_2\big)z_2 = \begin{pmatrix} \alpha_{11}^2 - \omega_2^2 & \alpha_{12}^2 \\ \alpha_{21}^2 & \alpha_{22}^2 - \omega_2^2 \end{pmatrix} z_2 = 0 \text{ sofort } z_2 = \begin{pmatrix} -\alpha_{12}^2 \\ \alpha_{11}^2 - \omega_2^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

aufgrund der Beziehung $\big(\omega_2^2 - \alpha_{11}^2\big)\big(\omega_2^2 - \alpha_{22}^2\big) = \alpha_{12}^2\alpha_{21}^2$. Man erhält somit die konjugiert komplexen Lösungen $z_2 \operatorname{Exp}(\mathbb{i}\omega_2 t)$ und $z_2 \operatorname{Exp}(-\mathbb{i}\omega_2 t)$ der Differentialgleichung. Bildet man Real- und Imaginärteil von $z_2 \operatorname{Exp}(\mathbb{i}\omega_2 t)$, so erhält man zwei *reelle* Lösungen $z_2 \cos\omega_2 t$ und $z_2 \sin\omega_2 t$ der Differentialgleichung.

4. Damit läßt sich die Lösung des Anfangswertproblems als Linearkombination

$$U(t) = z_1(\xi_{11}\cos\omega_1 t + \xi_{12}\sin\omega_1 t) + z_2(\xi_{21}\cos\omega_2 t + \xi_{22}\sin\omega_2 t)$$

mit vier Koordinaten $\xi_{11}, \xi_{12}, \xi_{21}, \xi_{22} \in \mathbb{R}$ darstellen. Um die Anfangsbedingungen $U_1(0) = U_0$, $U_2(0) = 0$ zu erfüllen, muß man das inhomogene Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -\alpha_{12}^2 & -\alpha_{12}^2 \\ \alpha_{11}^2 - \omega_1^2 & \alpha_{11}^2 - \omega_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{11} \\ \xi_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

lösen. Die Determinante $(\omega_2^2 - \omega_1^2)\alpha_{12}^2$ der Systemmatrix ist von Null verschieden, woraus sich die Lösung

$$\begin{pmatrix} \xi_{11} \\ \xi_{21} \end{pmatrix} = \frac{1}{(\omega_2^2 - \omega_1^2)\alpha_{12}^2} \begin{pmatrix} \alpha_{11}^2 - \omega_2^2 & \alpha_{12}^2 \\ \omega_1^2 - \alpha_{11}^2 & -\alpha_{12}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ergibt.}$$

Um die beiden anderen Koordinaten zu bestimmen, wird die Ableitung

$$DU(t) = \omega_1 z_1(\xi_{12}\cos\omega_1 t - \xi_{11}\sin\omega_1 t) + \omega_2 z_2(\xi_{22}\cos\omega_2 t - \xi_{21}\sin\omega_2 t)$$

gebildet. Zur Erfüllung der Anfangsbedingungen $DU_1(0) = 0$, $DU_2(0) = 0$ liefert das homogene Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -\omega_1\alpha_{12}^2 & -\omega_2\alpha_{12}^2 \\ \omega_1(\alpha_{11}^2 - \omega_1^2) & \omega_2(\alpha_{11}^2 - \omega_2^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{12} \\ \xi_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

die triviale Lösung $\xi_{12} = 0$, $\xi_{22} = 0$, da die Determinante $\omega_1\omega_2(\omega_2^2 - \omega_1^2)\alpha_{12}^2$ der Systemmatrix nicht verschwindet.

5. Insgesamt ergibt sich daraus für $t \in \mathbb{R}$ die Lösung

$$\begin{pmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_2^2 - \alpha_{11}^2 \\ -\alpha_{21}^2 \end{pmatrix} \frac{U_0 \cos \omega_1 t}{\omega_2^2 - \omega_1^2} + \begin{pmatrix} \alpha_{11}^2 - \omega_1^2 \\ \alpha_{21}^2 \end{pmatrix} \frac{U_0 \cos \omega_2 t}{\omega_2^2 - \omega_1^2}$$

des Anfangswertproblems. Da außerdem die *Resonanzbedingung* $L_1C_1 = L_2C_2$ erfüllt ist, vereinfacht sich die Lösung: Es gilt

$$\alpha_{11}^2 = \frac{L_2C_2}{(L_1L_2 - M^2)\, C_1C_2} = \frac{L_1C_1}{(L_1L_2 - M^2)\, C_1C_2} = \alpha_{22}^2$$

und somit nach Definition

$$\omega_2^2 - \alpha_{11}^2 = \alpha_{12}\alpha_{21}, \quad \alpha_{11}^2 - \omega_1^2 = \alpha_{12}\alpha_{21}, \quad \omega_2^2 - \omega_1^2 = 2\alpha_{12}\alpha_{21},$$

woraus schließlich wegen $\alpha_{21} = 5\alpha_{12}$ für die Spannungen

$$\begin{pmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \end{pmatrix} = \frac{U_0}{2} \begin{pmatrix} \cos \omega_2 t + \cos \omega_1 t \\ 5 \cos \omega_2 t - 5 \cos \omega_1 t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ -175 \end{pmatrix} \cos \omega_1 t + \begin{pmatrix} 35 \\ 175 \end{pmatrix} \cos \omega_2 t$$

folgt, da $U_0 = 70\,\mathrm{V}$ sowie $\omega_2 = 7\omega_1 = 500\,\mathrm{Hz}$ gilt. Für die Ströme erhält man

$$\begin{pmatrix} I_1(t) \\ I_2(t) \end{pmatrix} = \frac{U_0}{2} \begin{pmatrix} C_1\omega_1 \sin \omega_1 t + C_1\omega_2 \sin \omega_2 t \\ 5C_2\omega_1 \sin \omega_1 t - 5C_2\omega_2 \sin \omega_2 t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \sin \omega_1 t + \begin{pmatrix} 35 \\ -7 \end{pmatrix} \sin \omega_2 t.$$

Der Strom- und Spannungsverlauf resultiert aus einer Überlagerung von zwei freien und ungedämpften Schwingungen mit derselben Amplitude, aber verschiedenen Frequenzen. Dabei beeinflussen sich Träger- und Signalwellen nicht gegenseitig. Während der Transformator die Spannung im zweiten Schwingkreis mit dem Faktor 5 verstärkt, wird die Stromstärke mit dem gleichen Faktor 5 geschwächt. □

Aufgabe 5. Ein elektrisch geladenes Teilchen der Masse $m > 0$ und der Ladung $q \in \mathbb{R}$ bewegt sich in einem konstanten Magnetfeld $b \in \mathbb{R}^3$ unter dem Einfluß der Lorentz-Kraft sowie einer Federkraft mit der Konstanten $c > 0$, welche es nach dem Nullpunkt zu ziehen sucht. Man bestimme die Lösung des Anfangswertproblems

$$D(mDx)(t) = qDx(t) \times b - cx(t), \quad x(0) = x_0, \quad Dx(0) = v_0$$

für den Ort $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ des Teilchens, wenn der Anfangsort $x_0 \in \mathbb{R}^3$ und die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 \in \mathbb{R}^3$ vorgegeben sind!

Lösung. 1. Der lineare Operator $B \in L(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$, der jedem Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ das Vektorprodukt $v \times b \in \mathbb{R}^3$ mit dem fixierten Vektor $b \in \mathbb{R}^3$ zuordnet, kann mit einer antisymmetrischen Matrix identifiziert werden:

$$Bv = v \times b = \begin{pmatrix} v_2 b_3 - v_3 b_2 \\ v_3 b_1 - v_1 b_3 \\ v_1 b_2 - v_2 b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b_3 & -b_2 \\ -b_3 & 0 & b_1 \\ b_2 & -b_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

Mit $A_1 = \frac{q}{m} B \in L(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ und $A_0 = -\frac{c}{m} E \in L(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ wird das Anfangswertproblem in die explizite Form

$$D^2 x(t) = A_1 Dx(t) + A_0 x(t), \quad x(0) = x_0, \quad Dx(0) = v_0$$

gebracht. Im Falle des ungeladenen Teilchens oder eines nicht vorhandenen Magnetfelds hätte man $q = 0$ bzw. $b = 0$, woraus sich jeweils $A_1 = 0$ und damit der Fall einer schon diskutierten ungedämpften Schwingung ergeben würde. Ebenfalls bereits behandelt ist der Fall $c = 0$, also $A_0 = 0$, bei dem keine zusätzliche Federkraft wirkt. Im weiteren Verlauf soll der interessante Fall $q \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ und $v_0 \neq 0$ betrachtet werden.

2. Die Auswertung der Determinante $\det(A_0 + \mu A_1 - \mu^2 E) = 0$ zur Berechnung der Lösungen $\mu \in \mathbb{C}$ der charakteristischen Gleichung

$$0 = \begin{vmatrix} -\frac{c}{m} - \mu^2 & \frac{q}{m} b_3 \mu & -\frac{q}{m} b_2 \mu \\ -\frac{q}{m} b_3 \mu & -\frac{c}{m} - \mu^2 & \frac{q}{m} b_1 \mu \\ \frac{q}{m} b_2 \mu & -\frac{q}{m} b_1 \mu & -\frac{c}{m} - \mu^2 \end{vmatrix} = -\left(\mu^2 + \tfrac{c}{m}\right)^3 - \left(\tfrac{q}{m}\right)^2 \|b\|^2 \mu^2 \left(\mu^2 + \tfrac{c}{m}\right)$$

führt auf $\left(\mu^2 + \frac{c}{m}\right)\left((\mu^2 + \frac{c}{m})^2 + (\frac{q}{m})^2 \|b\|^2 \mu^2\right) = 0$. Führt man $\omega \neq 0$ und $\omega_1 > 0$ durch $\omega = \frac{q}{2m}\|b\|$ und $\omega_1^2 = \frac{c}{m}$ ein, so folgt $(\mu^2 + \omega_1^2)\left((\mu^2 + \omega_1^2)^2 + 4\omega^2 \mu^2\right) = 0$. Diese Gleichung hat die konjugiert komplexen Lösungen $\mu_1 = \omega_1 \mathbb{i}$ und $\overline{\mu}_1 = -\omega_1 \mathbb{i}$. Betrachtet man außerdem noch die beiden verschiedenen Frequenzen

$$\omega_2 = \sqrt{\omega^2 + \omega_1^2} + \omega > 0 \quad \text{und} \quad \omega_3 = \sqrt{\omega^2 + \omega_1^2} - \omega > 0,$$

so bekommt man auch die beiden anderen Paare $\mu_2 = \omega_2 \mathbb{i}$ und $\overline{\mu}_2 = -\omega_2 \mathbb{i}$ sowie $\mu_3 = \omega_3 \mathbb{i}$ und $\overline{\mu}_3 = -\omega_3 \mathbb{i}$ konjugiert komplexer Lösungen, wobei $\omega_2 \omega_3 = \omega_1^2$ gilt.

3. Zur Bestimmung der Lösungen $z \in \mathbb{C}^3$ der Gleichung $(A_0 + \mu A_1 - \mu^2 E)z = 0$ wird der normierte Vektor $u_1 = \frac{b}{\|b\|} \in \mathbb{R}^3$ eingeführt und durch Vektoren $u_2, u_3 \in \mathbb{R}^3$ zu einem Orthonormalsystem des $\mathbb{R}^3$ mit $\det(u_1, u_2, u_3) = 1$ ergänzt.

3.1. Für $\mu_1 = \omega_1 \mathbb{i} \in \mathbb{C}$ erfüllt der Vektor $z_1 = u_1 \in \mathbb{R}^3$ die Gleichung

$$A_0 z_1 + \mu_1 A_1 z_1 - \mu_1^2 z_1 = -\omega_1^2 u_1 + 2\mathbb{i}\omega\omega_1 u_1 \times u_1 + \omega_1^2 u_1 = 0.$$

Daraus ergeben sich die beiden konjugiert komplexen Lösungen $u_1 \operatorname{Exp}(\omega_1 \mathbb{i} t)$ sowie $u_1 \operatorname{Exp}(\omega_1 \mathbb{i} t)$ der Differentialgleichung. Bildet man Real- und Imaginärteil der komplexen Lösung $u_1 \operatorname{Exp}(\omega_1 \mathbb{i} t)$, so erhält man zwei *reelle* Lösungen

$$u_1 \cos \omega_1 t \quad \text{sowie} \quad u_1 \sin \omega_1 t$$

der Differentialgleichung.

3.2. Zu $\mu_2 = \omega_2 \mathbb{i} \in \mathbb{C}$ wird ein Vektor $z_2 = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 \in \mathbb{C}^3$ mit noch unbekannten komplexen Koordinaten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$ gesucht, der die Gleichung

$$0 = A_0 z_2 + \mu_2 A_1 z_2 - \mu_2^2 z_2 = \big(\omega_2^2 - \omega_1^2\big) z_2 + 2\mathbb{i}\omega\omega_2 z_2 \times u_1$$

erfüllt. Das Skalarprodukt von $\big(\omega_2^2 - \omega_1^2\big) z_2 + 2\mathbb{i}\omega\omega_2 z_2 \times u_1 = 0$ und $u_1 \in \mathbb{R}^3$ liefert

$$0 = \big(\omega_2^2 - \omega_1^2\big)\alpha_1 + 2\mathbb{i}\omega\omega_2 (z_2 \times u_1 | u_1) = \big(\omega_2^2 - \omega_1^2\big)\alpha_1 \quad \text{und somit} \quad \alpha_1 = 0.$$

Das Skalarprodukt von $(\omega_2^2 - \omega_1^2) z_2 + 2\mathbb{i}\omega\omega_2 z_2 \times u_1 = 0$ und $u_2 \in \mathbb{R}^3$ bringt

$$0 = \big(\omega_2^2 - \omega_1^2\big)\alpha_2 + 2\mathbb{i}\omega\omega_2 (z_2 \times u_1 | u_2) = \big(\omega_2^2 - \omega_1^2\big)\alpha_2 + 2\mathbb{i}\omega\omega_2\alpha_3$$

und damit $\alpha_2 = -\alpha_3 \mathbb{i}$ aufgrund der Beziehung $\omega_2^2 - \omega_1^2 = 2\omega\omega_2$. Das Skalarprodukt von $\big(\omega_2^2 - \omega_1^2\big) z_2 + 2\mathbb{i}\omega\omega_2 z_2 \times u_1 = 0$ und $u_3 \in \mathbb{R}^3$ liefert mit

$$0 = \big(\omega_2^2 - \omega_1^2\big)\alpha_3 + 2\mathbb{i}\omega\omega_2 (z_2 \times u_1 | u_3) = \big(\omega_2^2 - \omega_1^2\big)\alpha_3 - 2\mathbb{i}\omega\omega_2\alpha_2$$

die gleiche Information $\alpha_3 = \alpha_2 \mathbb{i}$. Daher kann $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = \mathbb{i}$ gewählt werden. Man erhält den Vektor $z_2 = u_2 + \mathbb{i} u_3 \in \mathbb{C}^3$ zu $\mu_2 = \omega_2 \mathbb{i}$ sowie den konjugiert komplexen Vektor $\overline{z}_2 = u_2 - \mathbb{i} u_3 \in \mathbb{C}^3$ zu $\overline{\mu}_2 = -\omega_2 \mathbb{i}$. Daraus ergeben sich die beiden konjugiert komplexen Lösungen $(u_2 + \mathbb{i} u_3) \operatorname{Exp}(\omega_2 \mathbb{i} t)$ und $(u_2 - \mathbb{i} u_3) \operatorname{Exp}(\omega_2 \mathbb{i} t)$ der Differentialgleichung. Bildet man Real- und Imaginärteil der komplexen Lösung $(u_2 + \mathbb{i} u_3) \operatorname{Exp}(\omega_2 \mathbb{i} t)$, so erhält man zwei *reelle* Lösungen

$$u_2 \cos \omega_2 t - u_3 \sin \omega_2 t \quad \text{sowie} \quad u_2 \sin \omega_2 t + u_3 \cos \omega_2 t$$

der Differentialgleichungen.

3.3. Zu $\mu_3 = i\omega_3 \in \mathbb{C}$ wird ein Vektor $z_3 = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \beta_3 u_3 \in \mathbb{C}^3$ mit noch unbekannten komplexen Koordinaten $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{C}$ gesucht, der die Gleichung

$$0 = A_0 z_3 + \mu_3 A_1 z_3 - \mu_3^2 z_3 = \left(\omega_3^2 - \omega_1^2\right) z_3 + 2\mathbb{i}\omega\omega_3 z_3 \times u_1$$

erfüllt. Das Skalarprodukt von $\left(\omega_3^2 - \omega_1^2\right) z_3 + 2\mathbb{i}\omega\omega_3 z_3 \times u_1 = 0$ und $u_1 \in \mathbb{R}^3$ liefert

$$0 = \left(\omega_3^2 - \omega_1^2\right)\beta_1 + 2\mathbb{i}\omega\omega_3 (z_3 \times u_1 | u_1) = \left(\omega_3^2 - \omega_1^2\right)\beta_1 \quad \text{und somit} \quad \beta_1 = 0.$$

Das Skalarprodukt von $\left(\omega_3^2 - \omega_1^2\right) z_3 + 2\mathbb{i}\omega\omega_3 z_3 \times u_1 = 0$ und $u_2 \in \mathbb{R}^3$ bringt

$$0 = \left(\omega_3^2 - \omega_1^2\right)\beta_2 + 2\mathbb{i}\omega\omega_3 (z_3 \times u_1 | u_2) = \left(\omega_3^2 - \omega_1^2\right)\beta_2 + 2\mathbb{i}\omega\omega_3\beta_3$$

und damit $\beta_2 = \beta_3 \mathbb{i}$ aufgrund der Beziehung $\omega_1^2 - \omega_3^2 = 2\omega\omega_3$. Das Skalarprodukt von $\left(\omega_3^2 - \omega_1^2\right) z_3 + 2\mathbb{i}\omega\omega_3 z_3 \times u_1 = 0$ und $u_3 \in \mathbb{R}^3$ liefert mit

$$0 = \left(\omega_3^2 - \omega_1^2\right)\beta_3 + 2\mathbb{i}\omega\omega_3 (z_3 \times u_1 | u_3) = \left(\omega_3^2 - \omega_1^2\right)\beta_3 - 2\mathbb{i}\omega\omega_3\beta_2$$

die gleiche Information $\beta_3 = -\beta_2 \mathbb{i}$. Daher kann $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 1$, $\beta_3 = -\mathbb{i}$ gewählt werden. Man erhält den Vektor $z_3 = u_2 - \mathbb{i} u_3 \in \mathbb{C}^3$ zu $\mu_3 = \omega_3 \mathbb{i}$ sowie den konjugiert komplexen Vektor $\overline{z}_3 = u_2 + \mathbb{i} u_3 \in \mathbb{C}^3$ zu $\overline{\mu}_3 = -\omega_3 \mathbb{i}$. Daraus ergeben sich die beiden konjugiert komplexen Lösungen $(u_2 - \mathbb{i} u_3)\,\mathrm{Exp}(\omega_3 \mathbb{i} t)$ und $(u_2 + \mathbb{i} u_3)\,\mathrm{Exp}(-\omega_3 \mathbb{i} t)$ der Differentialgleichung. Bildet man Real- und Imaginärteil der komplexen Lösung $(u_2 - \mathbb{i} u_3)\,\mathrm{Exp}(\omega_3 \mathbb{i} t)$, so erhält man zwei *reelle* Lösungen

$$u_2 \cos\omega_3 t + u_3 \sin\omega_3 t \quad \text{sowie} \quad u_2 \sin\omega_3 t - u_3 \cos\omega_3 t$$

der Differentialgleichung.

4. Damit läßt sich jede Lösung der Differentialgleichung als Linearkombination

$$\begin{aligned} x(t) &= \xi_{11} u_1 \cos\omega_1 t + \xi_{12} u_1 \sin\omega_1 t \\ &\quad + \xi_{21}\big(u_2 \cos\omega_2 t - u_3 \sin\omega_2 t\big) + \xi_{22}\big(u_2 \sin\omega_2 t + u_3 \cos\omega_2 t\big) \\ &\quad + \xi_{31}\big(u_2 \cos\omega_3 t + u_3 \sin\omega_3 t\big) + \xi_{32}\big(u_2 \sin\omega_3 t - u_3 \cos\omega_3 t\big) \end{aligned}$$

sechs linear unabhängiger Lösungen mit Koordinaten $\xi_{11}, \xi_{12}, \xi_{21}, \xi_{22}, \xi_{31}, \xi_{32} \in \mathbb{R}$ darstellen. Daraus ergibt sich die Geschwindigkeit als Zeitableitung

$$\begin{aligned} Dx(t) &= -\xi_{11}\omega_1 u_1 \sin\omega_1 t + \xi_{12}\omega_1 u_1 \cos\omega_1 t \\ &\quad - \xi_{21}\omega_2\big(u_2 \sin\omega_2 t + u_3 \cos\omega_2 t\big) + \xi_{22}\omega_2\big(u_2 \cos\omega_2 t - u_3 \sin\omega_2 t\big) \\ &\quad - \xi_{31}\omega_3\big(u_2 \sin\omega_3 t - u_3 \cos\omega_3 t\big) + \xi_{32}\omega_3\big(u_2 \cos\omega_3 t + u_3 \sin\omega_3 t\big). \end{aligned}$$

Um die Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$ und $Dx(0) = v_0$ zu erfüllen, muß also das folgende lineare Gleichungssystem gelöst werden:

$$\begin{aligned} \xi_{11} u_1 + \xi_{21} u_2 + \xi_{31} u_2 + \xi_{22} u_3 - \xi_{32} u_3 &= x_0, \\ \xi_{12}\omega_1 u_1 + \xi_{22}\omega_2 u_2 + \xi_{32}\omega_3 u_2 - \xi_{21}\omega_2 u_3 + \xi_{31}\omega_3 u_3 &= v_0. \end{aligned}$$

Da $\{u_1, u_2, u_3\}$ ein Orthonormalsystem des $\mathbb{R}^3$ ist, ergeben sich die Skalarprodukte

$$\begin{aligned} &(x_0|u_1) = \xi_{11}, && (x_0|u_2) = \xi_{21} + \xi_{31}, && (x_0|u_3) = \xi_{22} - \xi_{32}, \\ &(v_0|u_1) = \xi_{12}\omega_1, && (v_0|u_2) = \xi_{22}\omega_2 + \xi_{32}\omega_3, && (v_0|u_3) = -\xi_{21}\omega_2 + \xi_{31}\omega_3 \end{aligned}$$

und daraus schließlich

$$\xi_{11} = (x_0|u_1), \quad \xi_{21} = \frac{\omega_3(x_0|u_2) - (v_0|u_3)}{\omega_2 + \omega_3}, \quad \xi_{31} = \frac{\omega_2(x_0|u_2) + (v_0|u_3)}{\omega_2 + \omega_3},$$

$$\xi_{12} = \frac{(v_0|u_1)}{\omega_1}, \quad \xi_{22} = \frac{\omega_3(x_0|u_3) + (v_0|u_2)}{\omega_2 + \omega_3}, \quad \xi_{32} = \frac{-\omega_2(x_0|u_3) + (v_0|u_2)}{\omega_2 + \omega_3}$$

als gesuchte Koordinaten für die Darstellung der Lösung. Das elektrisch geladene Teilchen bewegt sich im Magnetfeld unter dem zusätzlichen Einfluß einer Federkraft entlang einer Raumkurve, die aus der Überlagerung einer Schwingung in Richtung des Magnetfelds mit der Eigenfrequenz ω_1 sowie zweier weiterer Schwingungen senkrecht zum Magnetfeld mit den Eigenfrequenzen ω_2 und ω_3 hervorgeht. $\square$

Aufgabe 6. Zwei Punktmassen $m_1 > 0$ und $m_2 > 0$ befinden sich an zwei Stellen der reellen Achse in Ruhelage und sind durch eine entspannte Feder mit der Konstante $c > 0$ verbunden. Zum Anfangszeitpunkt erfährt die Punktmasse m_1 eine Anfangsgeschwindigkeit $v_0 > 0$ in Richtung der reellen Achse.

1. Man berechne die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} m_1 D^2 x_1(t) &= c(x_2(t) - x_1(t)), \quad x_1(0) = 0, \quad Dx_1(0) = v_0 \\ m_2 D^2 x_2(t) &= c(x_1(t) - x_2(t)), \quad x_2(0) = 0, \quad Dx_2(0) = 0 \end{aligned}$$

für die orientierten Abstände $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ der Punktmassen von ihren Ruhelagen!

2. Man zeige, daß die Gesamtenergie

$$\mathcal{E}(t) = \frac{m_1}{2}\,|Dx_1(t)|^2 + \frac{m_2}{2}\,|Dx_2(t)|^2 + \frac{c}{2}\,|x_1(t) - x_2(t)|^2 \quad \text{für } t \in \mathbb{R}$$

als Summe der kinetischen Energie der Punktmassen und der potentiellen Energie der Feder erhalten bleibt, also von $t \in \mathbb{R}$ unabhängig ist!

Lösung. 1. Die homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung hat die Gestalt

$$\text{(H)} \qquad \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D^2 x_1(t) \\ D^2 x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & c \\ c & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

Um sie in die explizite Form zu bringen, wird von links mit der Inversen der ersten Matrix multipliziert. Daraus ergibt sich die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -c & c \\ c & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{c}{m_1} & \frac{c}{m_1} \\ \frac{c}{m_2} & -\frac{c}{m_2} \end{pmatrix} \in L(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$$

und das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} D^2 x_1(t) \\ D^2 x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{c}{m_1} & \frac{c}{m_1} \\ \frac{c}{m_2} & -\frac{c}{m_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} Dx_1(0) \\ Dx_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. Bei der Berechnung der Lösungen $\mu \in \mathbb{C}$ der charakteristischen Gleichung $\det(A - \mu^2 E) = 0$ ergibt sich

$$0 = \begin{vmatrix} -c - m_1\mu^2 & c \\ c & -c - m_2\mu^2 \end{vmatrix} = (c + m_1\mu^2)(c + m_2\mu^2) - c^2$$

und somit $\mu^2\big(\mu^2 m_1 m_2 + c(m_1 + m_2)\big) = 0$. Neben der Lösung $\mu_1 = 0$ der algebraischen Vielfachheit $l_1 = 2$ erhält man die beiden konjugiert komplexen Lösungen $\mu_2 = \omega\mathbb{i} \in \mathbb{C}$ sowie $\mu_3 = \overline{\mu}_2 = -\omega\mathbb{i} \in \mathbb{C}$, wobei die reelle Zahl $\omega > 0$ durch

$$\omega^2 = \frac{c(m_1 + m_2)}{m_1 m_2} = \frac{c}{m_1} + \frac{c}{m_2}$$

bestimmt wird.

3.1. Um die zu $\mu_1 = 0$ gehörenden Lösungen der Gleichung (H) zu finden, werden Vektoren $u_1 \in \mathbb{R}^2$ durch Lösung des Gleichungssystems $Au_1 = 0$ bestimmt. Eine elementare Umformung der Matrix

$$\begin{pmatrix} -\frac{c}{m_1} & \frac{c}{m_1} \\ \frac{c}{m_2} & -\frac{c}{m_2} \end{pmatrix} \quad \cdot \frac{m_1}{m_2}, + \quad \text{liefert} \quad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

als Lösung zu $\mu_1 = 0$.

3.2. Für eine zweite linear unabhängige Lösung zu $\mu_1 = 0$ wird der Lösungsansatz $u_2(t) = z_0 + z_1 t$ mit $z_0, z_1 \in \mathbb{R}^2$ in die Gleichung (H) eingesetzt. Der Koeffizientenvergleich bzgl. Termen gleicher Ordnung in t in der Gleichung $A(z_0 + z_1 t) = 0$ liefert die beiden linearen Gleichungssysteme $Az_0 = 0$ und $Az_1 = 0$ zur Bestimmung der gesuchten Vektoren $z_0, z_1 \in \mathbb{R}^2$. Somit ist $z_0 = 0$ und der bereits gefundene Vektor $z_1 = u_1$ Lösung des Systems $Az_0 = 0$ bzw. $Az_1 = 0$, und man erhält $u_2(t) = tu_1$ als zweite Lösung der Gleichung (H) zu $\mu_1 = 0$.

3.3. Um eine zu $\mu_2 = \omega \mathbb{i} \in \mathbb{C}$ gehörende Lösung der Gleichung (H) zu finden, wird ein Vektor $z_2 \in \mathbb{C}^2$ durch Lösung des Gleichungssystems $(A + \omega^2 E)z_2 = 0$ bestimmt. Wegen $\frac{c}{m_1} + \frac{c}{m_2} = \omega^2$ liefern elementare Umformungen

$$\begin{pmatrix} -\frac{c}{m_1} + \omega^2 & \frac{c}{m_1} \\ \frac{c}{m_2} & -\frac{c}{m_2} + \omega^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{c}{m_2} & \frac{c}{m_1} \\ \frac{c}{m_2} & \frac{c}{m_1} \end{pmatrix} \quad \cdot(-1), + \quad , \text{ also } z_2 = \begin{pmatrix} m_2 \\ -m_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Der konjugiert komplexe Vektor $z_3 = \overline{z}_2 = z_2 \in \mathbb{R}^2$ ist dann der entsprechende Vektor zur konjugiert komplexen Lösung $\mu_3 = \overline{\mu}_2 = -\omega \mathbb{i} \in \mathbb{C}$. Somit ergeben sich zu $\mu_2 = \omega \mathbb{i}$ und $\mu_3 = -\omega \mathbb{i}$ die beiden konjugiert komplexen Lösungen $z_2 \operatorname{Exp}(\omega \mathbb{i} t)$ und $z_2 \operatorname{Exp}(-\omega \mathbb{i} t)$ der Gleichung (H).

Bildet man den Realteil $u_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ und den Imaginärteil $u_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ der komplexen Lösung $z_2 \operatorname{Exp}(\omega \mathbb{i} t)$, so erhält man die beiden reellen Lösungen

$$u_3(t) = \begin{pmatrix} m_2 \cos \omega t \\ -m_1 \cos \omega t \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u_4(t) = \begin{pmatrix} m_2 \sin \omega t \\ -m_1 \sin \omega t \end{pmatrix} \quad \text{für } t \in \mathbb{R}$$

der Differentialgleichung (H).

4. Damit läßt sich jede Lösung der Gleichung (H) als Linearkombination

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \xi_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \xi_2 \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} + \xi_3 \begin{pmatrix} m_2 \cos \omega t \\ -m_1 \cos \omega t \end{pmatrix} + \xi_4 \begin{pmatrix} m_2 \sin \omega t \\ -m_1 \sin \omega t \end{pmatrix}$$

von linear unabhängigen Lösungen $u_1, u_2, u_3, u_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ der Gleichung (H) mit den Koordinaten $\xi \in \mathbb{R}^4$ darstellen. Ihre Ableitung hat die Gestalt

$$\begin{pmatrix} Dx_1(t) \\ Dx_2(t) \end{pmatrix} = \xi_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \xi_3 \begin{pmatrix} -m_2 \omega \sin \omega t \\ m_1 \omega \sin \omega t \end{pmatrix} + \xi_4 \begin{pmatrix} m_2 \omega \cos \omega t \\ -m_1 \omega \cos \omega t \end{pmatrix} \quad \text{für } t \in \mathbb{R}.$$

5. Die Anfangsbedingungen für $t_0 = 0$ führen auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ Dx_1(0) \\ Dx_2(0) \end{pmatrix} = \xi_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \xi_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \xi_3 \begin{pmatrix} m_2 \\ -m_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \xi_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m_2\omega \\ -m_1\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Elementare Umformungen der erweiterten Koeffizientenmatrix

$$\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 & 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & m_2\omega & v_0 \\ 0 & 1 & 0 & -m_1\omega & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \cdot(-1) \\ \leftarrow + \\ \cdot(-1) \end{array} \end{array} \quad \text{liefern} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & m_1 + m_2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (m_1 + m_2)\omega & v_0 \\ 0 & 1 & 0 & -m_1\omega & 0 \end{pmatrix},$$

woraus sich die gesuchten Koordinaten

$$\xi_1 = 0, \quad \xi_2 = \frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2}, \quad \xi_3 = 0, \quad \xi_4 = \frac{v_0}{(m_1 + m_2)\omega} \quad \text{ergeben.}$$

6. Als Lösung des Anfangswertproblems erhält man schließlich

$$x_1(t) = \frac{m_1 v_0\, t}{m_1 + m_2} + \frac{m_2 v_0}{(m_1 + m_2)\omega} \sin \omega t, \quad x_2(t) = \frac{m_1 v_0\, t}{m_1 + m_2} - \frac{m_1 v_0}{(m_1 + m_2)\omega} \sin \omega t$$

für die orientierten Abstände der Punktmassen m_1 und m_2 von ihren Ruhelagen sowie

$$Dx_1(t) = \frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2} + \frac{m_2 v_0}{m_1 + m_2} \cos \omega t, \quad Dx_2(t) = \frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2} - \frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2} \cos \omega t,$$

für die Geschwindigkeiten der Punktmassen m_1 und m_2. Die Bewegung entspricht der Überlagerung einer gleichförmigen Bewegung in Richtung der reellen Achse und einer ungedämpften Schwingung zwischen den Punktmassen.

7. Für die Differenz der kinetischen Energien der beiden Punktmassen zu den Zeitpunkten $t \in \mathbb{R}$ und $t_0 = 0$ gilt zunächst die Identität

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{kin}}(t) - \mathcal{E}_{\text{kin}}(0) &= \frac{m_1}{2} |Dx_1(t)|^2 + \frac{m_2}{2} |Dx_2(t)|^2 - \frac{m_1}{2} |Dx_1(0)|^2 - \frac{m_2}{2} |Dx_2(0)|^2 \\ &= \int_0^t \big(m_1 D^2 x_1(s) Dx_1(s) + m_2 D^2 x_2(s) Dx_2(s)\big)\, ds. \end{aligned}$$

Aufgrund der Differentialgleichung (H) folgt daraus

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{kin}}(t) - \mathcal{E}_{\text{kin}}(0) &= \int_0^t c\big(x_2(s) - x_1(s)\big)\big(Dx_1(s) - Dx_2(s)\big)\, ds \\ &= \frac{c}{2} |x_1(0) - x_2(0)|^2 - \frac{c}{2} |x_1(t) - x_2(t)|^2 = \mathcal{E}_{\text{pot}}(0) - \mathcal{E}_{\text{pot}}(t) \end{aligned}$$

für die Differenz der potentiellen Energien der Feder zu den Zeitpunkten $t_0 = 0$ und $t \in \mathbb{R}$, also $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_{\text{kin}}(t) + \mathcal{E}_{\text{pot}}(t) = \mathcal{E}_{\text{kin}}(0) + \mathcal{E}_{\text{pot}}(0) = \mathcal{E}(0)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. □