Übungsaufgaben 2

# Lineare Räume

**Aufgabe 1.** Für welche Wahl des Parameters $t \in \mathbb{R}$ wird durch die drei Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 1+t \end{pmatrix}$$

eine Basis im $\mathbb{R}^3$ gebildet? 6

*Lösung.* Die drei Vektoren bilden genau dann eine Basis im $\mathbb{R}^3$, wenn sie linear unabhängig sind. Die Aufgabe besteht also darin, zu bestimmen, für welche $t \in \mathbb{R}$ das lineare homogene Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \quad \cdot(-t) \quad \cdot(-t-1) \\ 2x_1 & + & 2tx_2 & + & tx_3 & = & 0 \quad + \\ 2tx_1 & & & + & (t+1)x_3 & = & 0 \quad + \end{array}$$

nur die Lösung $x = 0 \in \mathbb{R}^3$ besitzt. Geeignete Umformungen führen auf

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ (2-t)x_1 & + & tx_2 & & & = & 0 \\ (t-1)x_1 & - & (t+1)x_2 & & & = & 0 \quad + \end{array}$$

sowie desweiteren

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \quad + \\ (2-t)x_1 & + & tx_2 & & & = & 0 \quad + \\ x_1 & - & x_2 & & & = & 0 \quad \cdot t \end{array}$$

und somit schließlich

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & & & + & x_3 & = & 0 \quad + \\ 2x_1 & & & & & = & 0 \mid :2 \quad \cdot(-2) \quad \cdot(-1) \\ x_1 & - & x_2 & & & = & 0 \quad + \end{array} \qquad \text{und damit} \qquad \begin{array}{rcrcl} & & x_3 & = & 0 \\ x_1 & & & = & 0 \\ & -x_2 & & = & 0. \end{array}$$

Das System hat für *jedes* $t \in \mathbb{R}$ nur $x = 0 \in \mathbb{R}^3$ als Lösung. Somit bilden die drei vorgegebenen Vektoren für *alle* $t \in \mathbb{R}$ eine Basis im $\mathbb{R}^3$. $\square$

**Aufgabe 2.** Seien vier Vektoren $v_1$, $v_2$, $v_3 \in \mathbb{R}^3$ und $u \in \mathbb{R}^3$ wie folgt gegeben:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. Man zeige, daß $\{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis im $\mathbb{R}^3$ ist!

2. Man berechne die Koordinaten $x_1$, $x_2$, $x_3 \in \mathbb{R}$ des Vektors $u = \sum_{\ell=1}^{3} x_\ell v_\ell$ bezüglich der Basis $\{v_1, v_2, v_3\}$! ⑥

*Lösung.* Zur Darstellung des Vektors $u \in \mathbb{R}^3$ in der vermeintlichen Basis $\{v_1, v_2, v_3\}$ sucht man nach Lösungen $x \in \mathbb{R}^3$ der Vektorgleichung $x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = u$, das heißt, nach Lösungen $x \in \mathbb{R}^3$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcl l}
2x_1 & - & x_2 & & & = & 1 & \leftarrow + \\
-x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 & \cdot 2 \quad \cdot(-1) \\
-x_1 & + & 2x_2 & - & 4x_3 & = & 0. & \leftarrow +
\end{array}$$

Elementare Umformungen liefern

$$\begin{array}{rcrcrcl l}
 & & x_2 & - & 2x_3 & = & 1 & \cdot(-1) \quad \cdot(-1) \\
-x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 & \leftarrow + \\
 & & x_2 & - & 3x_3 & = & 0 & \leftarrow +
\end{array}$$

sowie desweiteren

$$\begin{array}{rcrcrcl l}
 & & x_2 & - & 2x_3 & = & 1 & \leftarrow + \\
-x_1 & & & + & x_3 & = & -1 & \leftarrow + \\
 & & & & -x_3 & = & -1 & \cdot(-2)
\end{array}
\qquad \text{und somit} \qquad
\begin{array}{rrrcl}
 & x_2 & & = & 3 \\
-x_1 & & & = & -2 \\
 & & -x_3 & = & -1.
\end{array}$$

Dieselben elementaren Umformungen ergeben, daß das entsprechende lineare homogene Gleichungssystem nur die Lösung $x = 0 \in \mathbb{R}^3$ besitzt. Damit ist gezeigt, daß die Menge $\{v_1, v_2, v_3\}$ linear unabhängig und somit eine Basis im $\mathbb{R}^3$ ist. Der Vektor $u$ hat die Koordinaten $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ und $x_3 = 1$ bezüglich der Basis $\{v_1, v_2, v_3\}$. $\square$

**Aufgabe 3.** Ist $V$ der lineare Raum aller stetigen Funktionen $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ über dem Körper $\mathbb{R}$, so betrachtet man dessen lineare Teilräume

$$V_0 = \left\{u \in V \mid \int_0^1 u(x)\,dx = 0\right\} \text{ und } V_1 = \left\{u \in V \mid u(x) = u(0) \text{ für alle } x \in [0,1]\right\}.$$

1. Man zeige, daß die Beziehungen $V = V_0 + V_1$ und $V_0 \cap V_1 = \{0\}$ gelten!

2. Man bestimme die Dimension $\dim V_0$ und die Codimension $\operatorname{codim} V_0 = \dim V_1$ des linearen Teilraums $V_0$ von $V$! ⑧

*Lösung.* 1.1. Tatsächlich sind $V_0$ und $V_1$ lineare Teilräume von $V$, denn es gilt

$$\int_0^1 (\lambda u + \mu v)(x)\,dx = \lambda \int_0^1 u(x)\,dx + \mu \int_0^1 v(x)\,dx = 0$$

und somit $\lambda u + \mu v \in V_0$ für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $u, v \in V_0$ sowie die Konstanz

$$(\lambda u + \mu v)(x) = \lambda u(x) + \mu v(x) = \lambda u(0) + \mu v(0) = (\lambda u + \mu v)(0)$$

für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $u, v \in V_1$ und $x \in [0,1]$, also $\lambda u + \mu v \in V_1$.

1.2. Ferner läßt sich jede stetige Funktion $v : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch

$$v_0(x) = v(x) - \int_0^1 v(\xi)\,d\xi, \quad v_1(x) = \int_0^1 v(\xi)\,d\xi \quad \text{für } x \in [0,1]$$

in eine Summe $v = v_0 + v_1$ von stetigen Funktionen $v_0, v_1 : [0,1] \to \mathbb{R}$ zerlegen, wobei für alle $x \in [0,1]$ sowohl

$$\int_0^1 v_0(x)\,dx = \int_0^1 \left(v(x) - \int_0^1 v(\xi)\,d\xi\right) dx = \int_0^1 v(x)\,dx - \int_0^1 v(\xi)\,d\xi = 0$$

als auch die Konstanz

$$v_1(x) = \int_0^1 v(\xi)\,d\xi = v_1(0)$$

gilt. Daraus folgt $v_0 \in V_0$ sowie $v_1 \in V_1$, das heißt, $V$ ist die Summe der beiden Teilräume $V_0$ und $V_1$. Um einzusehen, daß $V_0$ und $V_1$ in $V$ *komplementär* sind, genügt der Nachweis der Beziehung $V_0 \cap V_1 = \{0\}$: Für jedes $v \in V_0 \cap V_1$ gilt die Konstanz

$$v(x) = v(0) = \int_0^1 v(0)\,d\xi = \int_0^1 v(\xi)\,d\xi = 0 \quad \text{für alle } x \in [0,1]$$

und somit tatsächlich $v = 0$.

2. Definiert man die Funktionen $u_\ell : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch $u_\ell(x) = x^\ell$ für $x \in [0,1]$ und $\ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, dann gilt $\int_0^1 u_\ell(x)\,dx = \frac{1}{\ell+1}$ für jedes $\ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, woraus

$$\operatorname{lin}\left\{u_\ell - \tfrac{1}{\ell+1} u_0 \mid \ell \in \{1, \dots, n\}\right\} \subset V_0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

folgt. Ein Koeffizientenvergleich liefert zudem die lineare Unabhängigkeit der Menge $\left\{u_\ell - \frac{1}{\ell+1} u_0 \mid \ell \in \mathbb{N}\right\}$ in $V$. Somit ist $V_0$ ein unendlichdimensionaler linearer Teilraum von $V$. Wegen der Darstellung $V_1 = \operatorname{lin}\{u_0\}$ hat der lineare Teilraum $V_1$ die Dimension $\dim V_1 = 1$, woraus sich $\operatorname{codim} V_0 = 1$ ergibt. □

**Aufgabe 4.** Seien drei Vektoren $v_1, v_2, u \in \mathbb{R}^3$ wie folgt gegeben:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. Man zeige, daß die Menge $\{v_1, v_2\}$ in $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig ist und der lineare Teilraum $U_1 = \operatorname{lin}\{v_1, v_2\}$ von $\mathbb{R}^3$ somit zweidimensional ist!

2. Man überzeuge sich davon, daß der Vektor $u$ zum linearen Teilraum $U_1$ gehört und berechne seine Koordinaten $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ bezüglich der Basis $\{v_1, v_2\}$ von $U_1$!

3. Man stelle den linearen Teilraum $U_1$ von $\mathbb{R}^3$ in der Form

$$\{x \in \mathbb{R}^3 \mid c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = 0\}$$

für geeignete Koeffizienten $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ dar!

4. Man zeige, daß der Vektor $v_3 \in \mathbb{R}^3$ mit den Komponenten $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ einen linearen Teilraum $U_2 = \operatorname{lin}\{v_3\}$ von $\mathbb{R}^3$ erzeugt, der zu $U_1$ komplementär ist!

*Lösung.* 1. Um die Koordinaten des Vektors $u \in \mathbb{R}^3$ in der vermeintlichen Basis $\{v_1, v_2\}$ von $U_1$ zu berechnen, sucht man nach Lösungen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ der Vektorgleichung $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = u$, also des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 &= -6 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 &= 5 \quad \cdot(-1) \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 &= 1 \quad \leftarrow + \end{aligned} \qquad \text{und somit} \qquad \begin{aligned} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 &= -6 \quad \leftarrow + \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 &= 5 \quad \leftarrow + \\ \lambda_2 &= -4. \quad \cdot(-1) \quad \cdot(-3) \end{aligned}$$

Elementare Umformungen liefern

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 \qquad &= 6 \quad | :2 \quad \cdot(-1) \\ 3\lambda_1 \qquad &= 9 \quad | :3 \quad \leftarrow + \\ \lambda_2 &= -4 \end{aligned} \qquad \text{und somit} \qquad \begin{aligned} \lambda_1 &= 3 \\ \lambda_2 &= -4 \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

Dieselben elementaren Umformungen ergeben, daß das entsprechende lineare homogene Gleichungssystem nur die Lösung $x = 0 \in \mathbb{R}^3$ besitzt. Damit ist gezeigt, daß die Menge $\{v_1, v_2\}$ linear unabhängig und somit eine Basis des zweidimensionalen linearen Teilraums $U_1 = \operatorname{lin}\{v_1, v_2\}$ von $\mathbb{R}^3$ ist. Damit hat $u \in U_1$ die Koordinaten $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -4$ bezüglich der Basis $\{v_1, v_2\}$ von $U_1$.

2. Zur Darstellung des linearen Teilraums $U_1 = \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in \mathbb{R}^3 \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$ von $\mathbb{R}^3$ in der Form $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = 0\}$ sucht man nach Koeffizienten $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$, so daß

$$c_1(2\lambda_1 + 3\lambda_2) + c_2(3\lambda_1 + \lambda_2) + c_3(3\lambda_1 + 2\lambda_2) = 0$$

und damit

$$\lambda_1(2c_1 + 3c_2 + 3c_3) + \lambda_2(3c_1 + c_2 + 2c_3) = 0$$

für alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ gilt. Dies ist nur dann möglich, wenn sowohl $2c_1 + 3c_2 + 3c_3 = 0$ als auch $3c_1 + c_2 + 2c_3 = 0$ gilt. Gesucht sind also Lösungen $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ des linearen homogenen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcll} 2c_1 & + & 3c_2 & + & 3c_3 & = & 0 & \longleftarrow + \\ 3c_1 & + & c_2 & + & 2c_3 & = & 0. \mid \cdot 3 & \cdot(-1) \end{array}$$

Äquivalente Umformungen liefern

$$\begin{array}{rcrcrcll} -7c_1 & & & - & 3c_3 & = & 0 & \cdot 2 \\ 9c_1 & + & 3c_2 & + & 6c_3 & = & 0 & \longleftarrow + \end{array} \quad \text{sowie} \quad \begin{array}{rcrcrcl} -7c_1 & & & - & 3c_3 & = & 0 \\ -5c_1 & + & 3c_2 & & & = & 0. \end{array}$$

Alle Lösungen dieses Systems haben die Gestalt $c_1 = 3\lambda$, $c_2 = 5\lambda$, $c_3 = -7\lambda \in \mathbb{R}$, wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ frei wählbar ist. Da die gesuchte Darstellung nur bis auf ein gemeinsames Vielfaches der Koeffizienten eindeutig bestimmt ist, kann man $\lambda = 1$ wählen und erhält somit $c_1 = 3, c_2 = 5, c_3 = -7 \in \mathbb{R}$ sowie $U_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 3x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 0\}$.

3. Die beiden Vektoren $v_1$, $v_2 \in \mathbb{R}^3$ sind nach Schritt 1 linear unabhängig. Um einzusehen, daß auch die drei Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind, genügt es nachzuweisen, daß die beiden linearen Teilräume $U_1 = \mathrm{lin}\{v_1, v_2\}$ und $U_2 = \mathrm{lin}\{v_3\}$ den Durchschnitt $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ haben: Wird $u \in U_1 \cap U_2$ beliebig vorgegeben, dann existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $u = \lambda v_3 \in U_2$. Wegen Schritt 2 gilt somit $u = \lambda v_3 \in U_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 3x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 0\}$, das heißt,

$$0 = 3 \cdot 3\lambda + 5 \cdot 5\lambda - 7 \cdot (-7\lambda) = 83\lambda,$$

also $u = 0$, woraus sich $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ ergibt. Die Vektoren $\{v_1, v_2, v_3\}$ bilden eine Basis von $\mathbb{R}^3$, und die beiden Teilräume $U_1$ und $U_2$ von $\mathbb{R}^3$ sind komplementär. $\square$

**Aufgabe 5.** Sei das Intervall $X = [-1, 1] \subset \mathbb{R}$ gegeben. Ist $V$ der lineare Raum aller Funktionen $u : X \to \mathbb{R}$ über dem Körper $\mathbb{R}$, so betrachtet man

$$\begin{aligned} V_0 &= \big\{u \in V \mid u(-x) = u(x) \text{ für alle } x \in X\big\}, \\ V_1 &= \big\{u \in V \mid u(-x) = -u(x) \text{ für alle } x \in X\big\}. \end{aligned}$$

1. Man weise nach, daß $V_0$ und $V_1$ komplementäre lineare Teilräume von $V$ sind, das heißt, daß $V = V_0 + V_1$ und $V_0 \cap V_1 = \{0\}$ gilt!

2. Man zeige, daß die linearen Teilräume $V_0$ und $V_1$ unendlichdimensional sind!

*Lösung.* 1.1. In der Tat sind $V_0$ und $V_1$ lineare Teilräume von $V$, denn es gilt

$$(\lambda u + \mu v)(-x) = \lambda u(-x) + \mu v(-x) = \lambda u(x) + \mu v(x) = (\lambda u + \mu v)(x)$$

für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $u, v \in V_0$ und $x \in X$, also $\lambda u + \mu v \in V_0$ sowie desweiteren

$$(\lambda u + \mu v)(-x) = \lambda u(-x) + \mu v(-x) = -\lambda u(x) - \mu v(x) = -(\lambda u + \mu v)(x)$$

für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $u, v \in V_1$ und $x \in X$, also $\lambda u + \mu v \in V_1$.

1.2. Ferner läßt sich jede Funktion $v : X \to \mathbb{R}$ durch die Vorschrift

$$v_0(x) = \tfrac{1}{2}\big(v(x) + v(-x)\big), \quad v_1(x) = \tfrac{1}{2}\big(v(x) - v(-x)\big) \quad \text{für } x \in X$$

in eine Summe $v = v_0 + v_1$ von Funktionen $v_0 : X \to \mathbb{R}$ und $v_1 : X \to \mathbb{R}$ zerlegen, wobei für alle $x \in X$ sowohl

$$v_0(-x) = \tfrac{1}{2}\big(v(-x) + v(x)\big) = \tfrac{1}{2}\big(v(x) + v(-x)\big) = v_0(x)$$

als auch

$$v_1(-x) = \tfrac{1}{2}\big(v(-x) - v(x)\big) = -\tfrac{1}{2}\big(v(x) - v(-x)\big) = -v_1(x)$$

gilt. Daraus folgt $v_0 \in V_0$ sowie $v_1 \in V_1$, das heißt, $V$ ist die Summe der beiden Teilräume $V_0$ und $V_1$. Um einzusehen, daß $V_0$ und $V_1$ in $V$ *komplementär* sind, genügt der Nachweis der Beziehung $V_0 \cap V_1 = \{0\}$: Für jedes $v \in V_0 \cap V_1$ gilt tatsächlich $v(x) = v(-x) = -v(x)$, also $2v(x) = 0$ für alle $x \in X$ und somit $v = 0$.

2. Definiert man die Funktionen $u_\ell : X \to \mathbb{R}$ durch $u_\ell(x) = x^\ell$ für $x \in X$ und $\ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, dann gilt $u_{2\ell} \in V_0$ sowie $u_{2\ell+1} \in V_1$ für jedes $\ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, woraus

$$\sum_{\ell=0}^{n} \operatorname{lin}\{u_{2\ell}\} \subset V_0 \quad \text{und} \quad \sum_{\ell=0}^{n} \operatorname{lin}\{u_{2\ell+1}\} \subset V_1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt. Ein Koeffizientenvergleich liefert zudem die lineare Unabhängigkeit der Menge $\big\{u_\ell \mid \ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}\big\}$ in $V$. Somit müssen $V_0$ und $V_1$ unendlichdimensionale linearen Teilräume von $V$ sein. $\square$