Übungsaufgaben 3

Lineare Abbildungen

Aufgabe 1. Sei V ein linearer Raum und $P_1 \in L(V;V)$ ein Projektor, das heißt, es gelte $P_1 P_1 = P_1$. Sei ferner $I_V \in L(V;V)$ die identische Abbildung von V auf V.

1. Man zeige, daß $P_2 = I_V - P_1 \in L(V;V)$ ein Projektor ist, also $P_2 P_2 = P_2$ gilt! Man beweise außerdem, daß die Beziehungen $P_1 P_2 = 0$ und $P_2 P_1 = 0$ gelten!

2. Man weise nach, daß $V = V_1 + V_2$ die direkte Summe der beiden linearen Teilräume $V_1 = P_1[V]$ und $V_2 = P_2[V]$ von V ist! ⑥

Lösung. 1. Wegen $P_2 = I_V - P_1$ und $P_1 P_1 = P_1$ gilt die Beziehung

$$\begin{aligned} P_2 P_2 &= (I_V - P_1)(I_V - P_1) = I_V I_V - P_1 I_V - I_V P_1 + P_1 P_1 \\ &= I_V - P_1 - P_1 + P_1 = I_V - P_1 = P_2, \end{aligned}$$

das heißt, $P_2 = I_V - P_1 \in L(V;V)$ ist ein Projektor. Außerdem ergibt sich

$$P_1 P_2 = P_1(I_V - P_1) = P_1 I_V - P_1 P_1 = P_1 - P_1 = 0$$

sowie

$$P_2 P_1 = (I_V - P_1) P_1 = I_V P_1 - P_1 P_1 = P_1 - P_1 = 0.$$

2. Wegen der Beziehung $I_V = P_1 + P_2$ läßt sich jeder Vektor $v \in V$ in eine Summe $v = I_V(v) = P_1(v) + P_2(v)$ von Summanden $P_1(v) \in P_1[V]$ und $P_2(v) \in P_2[V]$ zerlegen, woraus sich zunächst $V = V_1 + V_2$ ergibt.

Um einzusehen, daß diese Summe *direkt* ist, sei ein Vektor $v \in P_1[V] \cap P_2[V]$ beliebig vorgegeben. Somit existieren zwei Vektoren $v_1, v_2 \in V$ mit $v = P_1(v_1)$ und $v = P_2(v_2)$. Daraus folgt wegen $I_V = P_1 + P_2$ und $P_1 P_2 = P_2 P_1 = 0$ die Beziehung

$$v = I_V(v) = P_1(v) + P_2(v) = P_1(P_2(v_2)) + P_2(P_1(v_1)) = 0,$$

also $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ und damit die Direktheit der Summe $V = V_1 + V_2$. □

Aufgabe 2. Sei die lineare Abbildung $T \in L(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$ durch

$$T(x) = \begin{pmatrix} \frac{2}{7}x_1 + \frac{3}{7}x_2 + \frac{6}{7}x_3 \\ -\frac{6}{7}x_1 - \frac{2}{7}x_2 + \frac{3}{7}x_3 \\ \frac{3}{7}x_1 - \frac{6}{7}x_2 + \frac{2}{7}x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{für } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

sowie der lineare Teilraum $V_1 = \{z \in \mathbb{R}^3 \mid T(z) = z\}$ von $\mathbb{R}^3$ gegeben.

1. Man zeige, daß die lineare Abbildung $T \in L(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$ bijektiv ist und bestimme ihre inverse Abbildung $T^{-1} \in L(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$, indem man für jedes $y \in \mathbb{R}^3$ die Lösung $x \in \mathbb{R}^3$ der Gleichung $T(x) = y$ berechnet!

2. Man weise nach, daß der lineare Teilraum V_1 eindimensional ist, indem man die Lösungen $z \in V_1$ der Gleichung $T(z) - z = 0$ bestimmt!

3. Sei ein Vektor $z \in V_1$, $z \neq 0$ mit den Komponenten $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{R}$ sowie der lineare Teilraum $V_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid z_1x_1 + z_2x_2 + z_3x_3 = 0\}$ von $\mathbb{R}^3$ gegeben. Man beweise, daß neben $T[V_1] = V_1$ auch $T[V_2] = V_2$ gilt! ⑧

Lösung. 1. Für jedes beliebig vorgegebene $y \in \mathbb{R}^3$ soll gezeigt werden, daß die Gleichung $T(x) = y$, also das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} \frac{2}{7}x_1 + \frac{3}{7}x_2 + \frac{6}{7}x_3 &=& y_1 \qquad \cdot 3 \quad \cdot\left(-\frac{3}{2}\right) \\ -\frac{6}{7}x_1 - \frac{2}{7}x_2 + \frac{3}{7}x_3 &=& y_2 \qquad + \\ \frac{3}{7}x_1 - \frac{6}{7}x_2 + \frac{2}{7}x_3 &=& y_3, \qquad\quad + \end{array}$$

genau eine Lösung $x \in \mathbb{R}^3$ besitzt: Äquivalente Umformungen liefern zunächst

$$\begin{array}{rcl} \frac{2}{7}x_1 + \frac{3}{7}x_2 + \frac{6}{7}x_3 &=& y_1 \qquad + \\ x_2 + 3x_3 &=& 3y_1 + y_2 \qquad \cdot\left(-\frac{3}{7}\right) \quad \cdot \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2}x_2 - x_3 &=& -\frac{3}{2}y_1 + y_3 \qquad + \end{array}$$

sowie desweiteren

$$\begin{array}{rcl} \frac{2}{7}x_1 - \frac{3}{7}x_3 &=& -\frac{2}{7}y_1 - \frac{3}{7}y_2 \qquad \mid \cdot \frac{7}{2} \\ x_2 + 3x_3 &=& 3y_1 + y_2 \\ \frac{7}{2}x_3 &=& 3y_1 + \frac{3}{2}y_2 + y_3 \mid \cdot \frac{2}{7} \end{array}$$

und schließlich

$$\begin{array}{rcl} x_1 - \frac{3}{2}x_3 &=& -y_1 - \frac{3}{2}y_2 \qquad + \\ x_2 + 3x_3 &=& 3y_1 + y_2 \qquad + \\ x_3 &=& \frac{6}{7}y_1 + \frac{3}{7}y_2 + \frac{2}{7}y_3. \qquad \cdot(-3) \quad \cdot \frac{3}{2} \end{array}$$

Die Inverse $T^{-1} \in L(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$ existiert somit und wird durch die *eindeutige* Lösung

$$T^{-1}(y) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7}y_1 - \frac{6}{7}y_2 + \frac{3}{7}y_3 \\ \frac{3}{7}y_1 - \frac{2}{7}y_2 - \frac{6}{7}y_3 \\ \frac{6}{7}y_1 + \frac{3}{7}y_2 + \frac{2}{7}y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{für jedes } y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ erklärt.}$$

2. Die Lösungen $z \in \mathbb{R}^3$ der Gleichung $T(z) - z = 0$ erhält man durch äquivalente Umformungen des entsprechenden linearen homogenen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rl} -\frac{5}{7}z_1 + \frac{3}{7}z_2 + \frac{6}{7}z_3 = 0 & \cdot 3 \quad \cdot 2 \\ -\frac{6}{7}z_1 - \frac{9}{7}z_2 + \frac{3}{7}z_3 = 0 & + \\ \frac{3}{7}z_1 - \frac{6}{7}z_2 - \frac{5}{7}z_3 = 0, & \quad + \end{array} \qquad \text{also} \qquad \begin{array}{rl} -\frac{5}{7}z_1 + \frac{3}{7}z_2 + \frac{6}{7}z_3 = 0 \mid \cdot 7 & \quad + \\ -3z_1 \qquad\quad + 3z_3 = 0 & + \\ -z_1 \qquad\quad + \ z_3 = 0 & \cdot(-3) \quad \cdot(-6) \end{array}$$

und somit

$$\begin{aligned} z_1 + 3z_2 \qquad &= 0 \\ z_1 \qquad - z_3 &= 0 \\ 0 &= 0, \end{aligned} \qquad \text{woraus für } w = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

die Darstellung $V_1 = \operatorname{lin}\{w\}$ des linearen Teilraumes $V_1 = \{z \in \mathbb{R}^3 \mid T(z) = z\}$ sowie $\dim V_1 = 1$ folgt. Natürlich gilt $T[V_1] \subset V_1$, da sich aus $z \in V_1$ stets $T(z) = z \in V_1$ ergibt. Da für alle $z \in V_1$ stets $z = T(z)$ und somit $T^{-1}(z) = z \in V_1$ gilt, erhält man auch $T^{-1}[V_1] \subset V_1$, folglich $V_1 \subset T[V_1]$ und insgesamt $T[V_1] = V_1$.

3.1. Wird $z \in V_1$ mit $z \neq 0$ beliebig vorgegeben, dann existiert wegen $V_1 = \operatorname{lin}\{w\}$ ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\lambda \neq 0$ und $z = \lambda w$. Daraus ergibt sich die Darstellung des Raumes

$$V_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid z_1x_1 + z_2x_2 + z_3x_3 = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 0\}.$$

3.2. Um einzusehen, daß $T[V_2] \subset V_2$ gilt, sei $x \in V_2$ beliebig vorgegeben. Für

$$y = T(x) = \begin{pmatrix} \frac{2}{7}x_1 + \frac{3}{7}x_2 + \frac{6}{7}x_3 \\ -\frac{6}{7}x_1 - \frac{2}{7}x_2 + \frac{3}{7}x_3 \\ \frac{3}{7}x_1 - \frac{6}{7}x_2 + \frac{2}{7}x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

erhält man wegen $3x_1 - x_2 + 3x_3 = 0$ die Beziehung

$$\begin{aligned} 3y_1 - y_2 + 3y_3 &= \left(\tfrac{6}{7}x_1 + \tfrac{9}{7}x_2 + \tfrac{18}{7}x_3\right) + \left(\tfrac{6}{7}x_1 + \tfrac{2}{7}x_2 - \tfrac{3}{7}x_3\right) + \left(\tfrac{9}{7}x_1 - \tfrac{18}{7}x_2 + \tfrac{6}{7}x_3\right) \\ &= 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \end{aligned}$$

und somit in der Tat $T(x) = y \in V_2$.

3.3. Um nachzuweisen, daß $T^{-1}[V_2] \subset V_2$ gilt, sei $y \in V_2$ beliebig vorgegeben. Für

$$x = T^{-1}(y) = \begin{pmatrix} \frac{2}{7}y_1 - \frac{6}{7}y_2 + \frac{3}{7}y_3 \\ \frac{3}{7}y_1 - \frac{2}{7}y_2 - \frac{6}{7}y_3 \\ \frac{6}{7}y_1 + \frac{3}{7}y_2 + \frac{2}{7}y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

(siehe Schritt 1) erhält man wegen $3y_1 - y_2 + 3y_3 = 0$ die Identität

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 3x_3 &= \left(\tfrac{6}{7}y_1 - \tfrac{18}{7}y_2 + \tfrac{9}{7}y_3\right) - \left(\tfrac{3}{7}y_1 - \tfrac{2}{7}y_2 - \tfrac{6}{7}y_3\right) + \left(\tfrac{18}{7}y_1 + \tfrac{9}{7}y_2 + \tfrac{6}{7}y_3\right) \\ &= 3y_1 - y_2 + 3y_3 = 0 \end{aligned}$$

und somit tatsächlich $T^{-1}(y) = x \in V_2$. Da aus $T^{-1}[V_2] \subset V_2$ offenbar $V_2 \subset T[V_2]$ folgt, ergibt sich mit Schritt 3.2 schließlich $T[V_2] = V_2$. $\square$

Aufgabe 3. Gegeben seien die Vektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \; u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; w_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. Man zeige, daß $\{u_1, u_2, u_3\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist!

2. Sei $S \in L(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ jene lineare Abbildung, welche durch die Vorgabe der Bilder $S(u_1) = w_1$, $S(u_2) = w_2$, $S(u_3) = w_3$ eindeutig bestimmt wird. Man berechne jene Vektoren v_1, v_2, $v_3 \in \mathbb{R}^3$, für welche die Darstellung $S(y) = y_1 v_1 + y_2 v_2 + y_3 v_3$ für alle $y \in \mathbb{R}^3$ gilt! ⑥

Lösung. 1. Um einzusehen, daß $\{u_1, u_2, u_3\}$ eine Basis ist, soll gezeigt werden, daß die durch $T(x) = x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_2 u_3$ für $x \in \mathbb{R}^3$ definierte lineare Abbildung $T \in L(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ bijektiv ist. Dazu wird für jede vorgegebene rechte Seite $y \in \mathbb{R}^3$ jeweils die Lösung $x \in \mathbb{R}^3$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcl} -2x_1 & & & + & x_3 & = & y_1 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & y_2 \\ & & -3x_2 & + & x_3 & = & y_3, \end{array} \qquad \text{also} \qquad \begin{array}{rcrcrcl} -x_1 & + & 2x_2 & & & = & y_1 + y_2 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & y_2 \\ x_1 & - & x_2 & & & = & y_2 + y_3 \end{array}$$

bestimmt. Äquivalente Umformungen führen schließlich auf

$$\begin{array}{rcrcrcl} -x_1 & + & 2x_2 & & & = & y_1 + y_2 \\ & & 4x_2 & - & x_3 & = & y_1 + 2y_2 \\ & & x_2 & & & = & y_1 + 2y_2 + y_3. \end{array}$$

Somit existiert die inverse Abbildung $T^{-1} \in L(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$. Sie hat die Gestalt

$$T^{-1}(y) = x = \begin{pmatrix} y_1 + 3y_2 + 2y_3 \\ y_1 + 2y_2 + y_3 \\ 3y_1 + 6y_2 + 4y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{für jedes} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

2. Daraus ergibt sich wegen der Beziehung

$$\begin{aligned} S(y) = S(T(x)) &= S(x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3) = x_1 S(u_1) + x_2 S(u_2) + x_3 S(u_3) \\ &= (y_1 + 3y_2 + 2y_3) w_1 + (y_1 + 2y_2 + y_3) w_2 + (3y_1 + 6y_2 + 4y_3) w_3 \end{aligned}$$

für alle $y \in \mathbb{R}^3$ die Darstellung $S(y) = y_1 v_1 + y_2 v_2 + y_3 v_3$ mit den Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

für die lineare Abbildung $S \in L(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$. □

Aufgabe 4. Man bestimme Bildraum und Kern der durch

$$T(x) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ 4x_1 + 3x_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S(y) = \begin{pmatrix} y_1 + 2y_2 + 2y_3 \\ y_1 + 3y_2 + 5y_3 \\ y_2 + 3y_3 \\ 2y_1 + 7y_2 + 13y_3 \end{pmatrix} \quad \text{für } x, y \in \mathbb{R}^3$$

definierten linearen Abbildungen $T \in L(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$ und $S \in L(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^4)$ sowie der Verkettung $ST \in L(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^4)$!

Lösung. 1. Zur Bestimmung des Kerns $S^{-1}[\{0\}] \subset \mathbb{R}^3$ und des Bildraums $S[\mathbb{R}^3] \subset \mathbb{R}^4$ von $S \in L(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^4)$ liefern elementare Umformungen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcl} y_1 + 2y_2 + 2y_3 &=& z_1 \\ y_1 + 3y_2 + 5y_3 &=& z_2 \\ y_2 + 3y_3 &=& z_3 \\ 2y_1 + 7y_2 + 13y_3 &=& z_4 \end{array}$$

für $y \in \mathbb{R}^3$ und $z \in \mathbb{R}^4$ zunächst

$$\begin{array}{rcl} y_1 + 2y_2 + 2y_3 &=& z_1 \\ y_2 + 3y_3 &=& z_2 - z_1 \\ y_2 + 3y_3 &=& z_3 \\ 3y_2 + 9y_3 &=& z_4 - 2z_1 \end{array}$$

und somit

$$\begin{array}{rcl} y_1 \qquad - 4y_3 &=& z_1 - 2z_3 \\ 0 &=& z_2 - z_1 - z_3 \\ y_2 + 3y_3 &=& z_3 \\ 0 &=& z_4 - 2z_1 - 3z_3 \end{array} \qquad \text{für } y \in \mathbb{R}^3 \text{ und } z \in \mathbb{R}^4.$$

Für die Kernvektoren $y \in S^{-1}[\{0\}]$ und die Bildvektoren $z \in S[\mathbb{R}^3]$ ergeben sich aufgrund der Theorie der Lösbarkeit des obigen Gleichungssystems die Beziehungen

$$\begin{array}{rcl} y_1 &=& 4\tau \\ y_2 &=& -3\tau \\ y_3 &=& \tau \\ 0 &=& 0 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{rcl} z_1 \qquad - 2z_3 &=& \lambda \\ -z_1 + z_2 - z_3 &=& 0 \\ z_3 &=& \mu \\ -2z_1 \qquad - 3z_3 + z_4 &=& 0 \end{array}$$

mit freien Parametern $\tau, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und deshalb

$$\begin{array}{rcl} y_1 &=& 4\tau \\ y_2 &=& -3\tau \\ y_3 &=& \tau \\ 0 &=& 0 \end{array} \quad \text{sowie} \quad \begin{array}{rcl} z_1 &=& \lambda + 2\mu \\ z_2 &=& \lambda + 3\mu \\ z_3 &=& \mu \\ z_4 &=& 2\lambda + 7\mu. \end{array}$$

Damit erhält man für die Wahl der Vektoren

$$u = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{sowie} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \quad \text{und} \quad w = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

den Kern $S^{-1}[\{0\}] = \operatorname{lin}\{u\} \subset \mathbb{R}^3$ und den Bildraum $S[\mathbb{R}^3] = \operatorname{lin}\{v, w\} \subset \mathbb{R}^4$ der linearen Abbildung $S \in L(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^4)$.

2. Um zu zeigen, daß die lineare Abbildung $T \in L(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ bijektiv ist, führen elementare Umformungen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcll} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & y_1 & \cdot(-2) \quad \cdot(-4) \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & y_2 & + \\ 4x_1 & & & + & 3x_3 & = & y_3 & \qquad\quad + \end{array}$$

für beliebig vorgegebene rechte Seiten $y \in \mathbb{R}^3$ auf

$$\begin{array}{rcrcrcll} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & y_1 & + \\ & & x_2 & & & = & -2y_1 + y_2 & \cdot(-1) \quad \cdot 4 \\ & & -4x_2 & - & x_3 & = & -4y_1 + y_3 & \qquad\quad + \end{array}$$

und somit zu

$$\begin{array}{rcrcrcll} x_1 & & & + & x_3 & = & 3y_1 - y_2 & + \\ & & x_2 & & & = & -2y_1 + y_2 & \\ & & & & -x_3 & = & -12y_1 + 4y_2 + y_3. & \end{array}$$

Damit existiert die Inverse $T^{-1} \in L(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$. Sie wird durch die *eindeutige* Lösung

$$T^{-1}(y) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9y_1 + 3y_2 + y_3 \\ -2y_1 + y_2 \\ 12y_1 - 4y_2 - y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{für jedes } y \in \mathbb{R}^3 \text{ erklärt.}$$

Somit hat $T \in L(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ den Kern $T^{-1}[\{0\}] = \{0\}$ und den Bildraum $T[\mathbb{R}^3] = \mathbb{R}^3$.

3. Die Schritte 1 und 2 liefern den Bildraum $S[T[\mathbb{R}^3]] = S[\mathbb{R}^3] = \operatorname{lin}\{v, w\}$ und den Kern $(ST)^{-1}[\{0\}] = T^{-1}[S^{-1}[\{0\}]] = \operatorname{lin}\{T^{-1}(u)\}$ von $ST \in L(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^4)$, wobei

$$T^{-1}(u) = \begin{pmatrix} -44 \\ -11 \\ 59 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

das Urbild des Kernvektors $u \in S^{-1}[\{0\}]$ ist. $\square$

Aufgabe 5. Sei V der lineare Raum aller *unendlichmal differenzierbaren* Funktionen $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ über dem Körper $\mathbb{R}$, ferner $T \in L(V; V)$ der durch

$$T(u)(x) = -D^2u(x) \quad \text{für } u \in V,\, x \in \mathbb{R}$$

definierte lineare *Differentialoperator* sowie $S \in L(V; V)$ der durch

$$S(g)(x) = (1-x)\int_0^x \xi g(\xi)\,d\xi + x\int_x^1 (1-\xi)g(\xi)\,d\xi \quad \text{für } g \in V,\, x \in \mathbb{R}$$

erklärte lineare *Integraloperator*. Desweiteren betrachtet man den linearen Teilraum

$$V_0 = \{v \in V \mid u(0) = u(1) = 0\} \quad \text{von } V.$$

Man zeige, daß die Einschränkung $T_0 = T|V_0 \in L(V_0; V)$ ein Isomorphismus von V_0 auf V und S die inverse Abbildung von T_0 ist!

Lösung. 1. Da aus $u \in V$ stets $T(u) = -D^2u \in V$ folgt, erhält man tatsächlich einen linearen Operator $T \in L(V; V)$ und somit auch $T_0 = T|V_0 \in L(V_0; V)$.

Um zu zeigen, daß $T_0 \in L(V_0; V)$ injektiv ist, sei $u \in V_0$ mit $T(u) = -D^2u = 0$ beliebig vorgegeben. Daraus ergibt sich die Existenz einer Konstanten $\lambda \in \mathbb{R}$, so daß $Du(x) = \lambda$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Somit gibt es eine weitere Konstante $\mu \in \mathbb{R}$ derart, daß $u(x) = \lambda x + \mu$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt. Wegen $u(0) = u(1) = 0$ folgt daraus $\lambda = \mu = 0$ und somit $u = 0$, das heißt, die Injektivität von $T_0 \in L(V_0; V)$.

2. Um einzusehen, daß $T_0 \in L(V_0; V)$ surjektiv ist, sei $g \in V$ beliebig vorgegeben. Als Summe von Produkten von differenzierbaren bzw. von Stammfunktionen differenzierbarer Funktionen ist $u = S(g) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, wobei deren Ableitung $Du : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$\begin{aligned} Du(x) &= -\int_0^x \xi g(\xi)\,d\xi + x(1-x)g(x) + \int_x^1 (1-\xi)g(\xi)\,d\xi - x(1-x)g(x) \\ &= -\int_0^x \xi g(\xi)\,d\xi + \int_x^1 (1-\xi)g(\xi)\,d\xi \end{aligned}$$

für $x \in \mathbb{R}$ gegeben ist. Als Stammfunktion einer differenzierbaren Funktion ist auch $Du : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar, wobei die zweite Ableitung $D^2u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Gestalt

$$D^2u(x) = -xg(x) - (1-x)g(x) = -g(x) \quad \text{für jedes } x \in \mathbb{R}$$

besitzt, also $D^2u = -g \in V$ und somit auch $u = S(g) \in V$ sowie $S \in L(V; V)$ gelten. Die Definition von S liefert zudem $u(0) = u(1) = 0$, also $u = S(g) \in V_0$.

Somit existiert für jedes $g \in V$ ein $u = S(g) \in V_0$ mit $T(u) = -D^2u = g$, woraus die Surjektivität von $T_0 \in L(V_0; V)$ folgt. Damit ist $T_0 = T|V_0 \in L(V_0; V)$ ein Isomorphismus von V_0 auf V und S die inverse Abbildung von T_0. $\square$