Übungsaufgaben 4

Affine Teilräume und Hyperebenen

Aufgabe 1. Seien die drei affinen Hyperebenen

$$\begin{aligned} M_1 &= \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0\}, \\ M_2 &= \{x \in \mathbb{R}^3 \mid -x_1 - x_2 + 2x_3 = 2\}, \\ M_3 &= \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 + 2x_3 = 4\} \end{aligned}$$

in $\mathbb{R}^3$ gegeben. Man bestimme den Durchschnitt $M = \cap_{k=1}^{3} M_k$ dieser Ebenen! ⑥

Lösung. Die Vektoren $x \in \mathbb{R}^3$, die zu allen drei Ebenen M_1, M_2 und M_3 gehören, stimmen mit der Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \quad \leftarrow + \\ -x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \quad \leftarrow + \\ x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \quad \cdot(-1) \end{array}$$

überein. Äquivalente Unformungen liefern

$$\begin{array}{rcrcrcll} 4x_1 & & & & & = & 4 & \mid :4 \\ -2x_1 & & & & & = & -2 & \mid :2 \quad \leftarrow + \\ x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 4 & \mid \cdot(-1) \quad \leftarrow + \quad \leftarrow \end{array}$$

sowie

$$\begin{array}{rcl} x_1 \qquad\qquad & = & 1 \\ x_2 - 2x_3 & = & -3 \\ 0 & = & 0 \end{array} \qquad \text{und somit} \qquad \begin{array}{rcl} x_1 & = & 1 \\ x_2 & = & -3 + 2\lambda \\ x_3 & = & \lambda \end{array}$$

mit dem frei wählbaren Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$. Definiert man einen Verschiebungsvektor $v \in \mathbb{R}^3$ und einen Richtungsvektor $u_0 \in \mathbb{R}^3$ durch

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

dann schneiden sich die drei affinen Hyperebenen M_1, M_2 und M_3 in der affinen Geraden $M = \{v + \lambda u_0 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ im $\mathbb{R}^3$. □

Aufgabe 2. Seien Vektoren $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^3$ sowie ein Verschiebungsvektor $v \in \mathbb{R}^3$ durch

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{gegeben.}$$

1. Man zeige, daß $U = \operatorname{lin}\{u_1, u_2\}$ eine Hyperebene in $\mathbb{R}^3$ ist!
2. Man stelle die affine Hyperebene $M = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid u - v \in U\}$ von $\mathbb{R}^3$ in der Form

$$M = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = \mu\right\}$$

für geeignete Koeffizienten ξ_1, ξ_2, $\xi_3 \in \mathbb{R}$ und eine rechte Seite $\mu \in \mathbb{R}$ dar! ⑥

Lösung. 1. Um einzusehen, daß die Vektoren u_1, $u_2 \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängig sind, sucht man nach den Lösungen λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ der Vektorgleichung $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0$, also des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 &= 0 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \quad \cdot(-1) \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 &= 0 \quad \leftarrow + \end{aligned} \qquad \text{und somit} \qquad \begin{aligned} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 &= 0 \quad \leftarrow + \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \quad \leftarrow + \\ \lambda_2 &= 0. \quad \cdot(-1) \quad \cdot(-3) \end{aligned}$$

Elementare Umformungen liefern

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 \qquad &= 0 \mid :2 \quad \cdot(-1) \\ 3\lambda_1 \qquad &= 0 \mid :3 \quad \leftarrow + \\ \lambda_2 &= 0 \quad \leftarrow \end{aligned} \qquad \text{und somit} \qquad \begin{aligned} \lambda_1 \qquad &= 0 \\ \lambda_2 &= 0 \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, daß das lineare Gleichungssystem nur die Lösung $x = 0 \in \mathbb{R}^3$ besitzt, die Menge $\{u_1, u_2\}$ linear unabhängig und somit eine Basis des zweidimensionalen linearen Teilraums $U = \operatorname{lin}\{u_1, u_2\}$ von $\mathbb{R}^3$ ist. Damit gilt $\operatorname{codim} U = 1$, das heißt, U ist eine Hyperebene in $\mathbb{R}^3$.

2. Zur Darstellung des affinen Teilraums $M = \{v + \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \in \mathbb{R}^3 \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$ von $\mathbb{R}^3$ in der Form $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = \mu\}$ sucht man nach Koeffizienten $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \mathbb{R}$ und einer rechten Seite $\mu \in \mathbb{R}$, so daß

$$\xi_1(1 + 2\lambda_1 + 3\lambda_2) + \xi_2(2 + 3\lambda_1 + \lambda_2) + \xi_3(2 + 3\lambda_1 + 2\lambda_2) = \mu$$

und damit

$$\lambda_1(2\xi_1 + 3\xi_2 + 3\xi_3) + \lambda_2(3\xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3) = \mu - (\xi_1 + 2\xi_2 + 2\xi_3)$$

für alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ gilt. Ein Koeffizientenvergleich bzgl. Termen gleicher Ordnung in λ_1 bzw. λ_2 liefert die Bedingungen $2\xi_1 + 3\xi_2 + 3\xi_3 = 0$ und $3\xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3 = 0$ sowie $\xi_1 + 2\xi_2 + 2\xi_3 = \mu$. Gesucht sind also Lösungen $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \mathbb{R}$ des linearen inhomogenen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcl l}
2\xi_1 & + & 3\xi_2 & + & 3\xi_3 & = & 0 & \quad + \\
3\xi_1 & + & \xi_2 & + & 2\xi_3 & = & 0 & \quad + \\
\xi_1 & + & 2\xi_2 & + & 2\xi_3 & = & \mu & \quad \cdot(-3) \quad \cdot(-2)
\end{array}$$

mit dem Parameter $\mu \in \mathbb{R}$. Äquivalente Umformungen liefern

$$\begin{array}{rcrcrcl l}
 & & -\xi_2 & - & \xi_3 & = & -2\mu & \quad \cdot(-5) \quad \cdot 2 \\
 & & -5\xi_2 & - & 4\xi_3 & = & -3\mu & \quad + \\
\xi_1 & + & 2\xi_2 & + & 2\xi_3 & = & \mu & \quad +
\end{array}
\qquad \text{und somit} \qquad
\begin{array}{rcrcrcl l}
 & & -\xi_2 & - & \xi_3 & = & -2\mu & \quad + \\
 & & & & \xi_3 & = & 7\mu & \\
\xi_1 & & & & & = & -3\mu. &
\end{array}$$

Alle Lösungen dieses Systems haben die Gestalt $\xi_1 = -3\mu$, $\xi_2 = -5\mu$, $\xi_3 = 7\mu \in \mathbb{R}$, wobei der Parameter $\mu \in \mathbb{R}$ frei wählbar ist. Da die gesuchte Darstellung nur bis auf ein gemeinsames Vielfaches der Unbekannten eindeutig bestimmt ist, kann man als rechte Seite $\mu = -1$ wählen und erhält somit $\xi_1 = 3$, $\xi_2 = 5$, $\xi_3 = -7 \in \mathbb{R}$ sowie $M = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 3x_1 + 5x_2 - 7x_3 = -1\}$. □

Aufgabe 3. Seien die Funktionen $v_1, v_2, v_3, v_4 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ durch

$$v_1(x) = \cos x, \quad v_2(x) = \sin x, \quad v_3(x) = \cos 2x, \quad v_4(x) = \sin 2x \quad \text{für } x \in [0, 2\pi]$$

sowie der lineare Teilraum $U = \operatorname{lin}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ des linearen Raumes V aller reellwertigen Funktionen $u : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ über dem Körper $\mathbb{R}$ gegeben.

1. Man weise nach, daß $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ eine Basis von U ist!
2. Definiert man für jedes $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ die Linearform $f_k \in U^*$ durch

$$\langle f_k, u\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} v_k(x)\, u(x)\, dx \quad \text{für } u \in U,$$

so zeige man, daß $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ die zu $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ duale Basis von U^* bildet!

3. Man bestimme alle Funktionen $u \in U$, welche zu *jeder* der affinen Hyperebenen

$$\begin{aligned}
M_1 &= \big\{u \in U \mid \langle 6f_1 + f_2 - f_3 + f_4, u\rangle = 7\big\}\\
M_2 &= \big\{u \in U \mid \langle 6f_1 - f_2 + f_3 + f_4, u\rangle = 3\big\}\\
M_3 &= \big\{u \in U \mid \langle 2f_1 - f_2 + f_3 - f_4, u\rangle = 1\big\}\\
M_4 &= \big\{u \in U \mid \langle 2f_1 - f_2 - f_3 + f_4, u\rangle = 1\big\}
\end{aligned}$$

gehören! ⑧

Lösung. 1. Um zu zeigen, daß die Menge $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ linear unabhängig ist, seien beliebige Koordinaten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ mit $\sum_{\ell=1}^4 \lambda_\ell v_\ell = 0$, das heißt,

$$\lambda_1 \cos x + \lambda_2 \sin x + \lambda_3 \cos 2x + \lambda_4 \sin 2x = 0 \quad \text{für alle } x \in [0, 2\pi]$$

gegeben. Daraus ergibt sich für $x \in \big\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{\pi}{4}\big\}$ das homogene Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrrl}
\lambda_1 & & +\,\lambda_3 & & = 0 \quad :(-\sqrt{2})\\
 & \lambda_2 & -\,\lambda_3 & & = 0 \quad :(-\sqrt{2})\\
-\lambda_1 & & +\,\lambda_3 & & = 0 \quad +\\
\frac{1}{\sqrt{2}}\lambda_1 & +\,\frac{1}{\sqrt{2}}\lambda_2 & & +\,\lambda_4 & = 0 \quad + \quad +
\end{array}$$

sowie nach äquivalenten elementaren Umformungen

$$\begin{array}{rrl}
\lambda_1 & +\;\lambda_3 & = 0 \quad +\\
\lambda_2 & -\;\lambda_3 & = 0 \quad +\\
 & 2\lambda_3 & = 0 \mid :2 \quad \cdot(-1)\\
 & \lambda_4 & = 0
\end{array}$$

und somit schließlich $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Daher ist $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ eine Basis von $U = \operatorname{lin}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

2. Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ liefern die Additionstheoreme

$$\int_0^{2\pi} \cos\alpha x \cos\beta x \, dx = \int_0^{2\pi} \frac{(\cos(\alpha+\beta)x + \cos(\alpha-\beta)x)\, dx}{2} = \begin{cases} \pi & \text{für } \alpha = \beta, \\ 0 & \text{für } \alpha \neq \beta, \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos\alpha x \sin\beta x \, dx = \int_0^{2\pi} \frac{(\sin(\alpha+\beta)x - \sin(\alpha-\beta)x)\, dx}{2} = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin\alpha x \sin\beta x \, dx = \int_0^{2\pi} \frac{(\cos(\alpha-\beta)x - \cos(\alpha+\beta)x)\, dx}{2} = \begin{cases} \pi & \text{für } \alpha = \beta, \\ 0 & \text{für } \alpha \neq \beta \end{cases}$$

und somit für alle $k, \ell \in \{1,2,3,4\}$ schließlich

$$\int_0^{2\pi} v_k(x) v_\ell(x)\, dx = \begin{cases} \pi & \text{für } k = \ell, \\ 0 & \text{für } k \neq \ell. \end{cases}$$

3. Damit die Linearkombination $u = \sum_{\ell=1}^4 x_\ell v_\ell \in U$ zum Durchschnitt $\cap_{k=1}^4 M_k$ der affinen Hyperebenen gehört, müssen aufgrund von Schritt 2 die vier Koordinaten $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$ von u bezüglich der Basis $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 6x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 7 &&+ \\ 6x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 3 &&+ \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 1 && \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 1 &&+ \end{aligned}$$

lösen. Äquivalente Umformungen liefern zunächst

$$\begin{aligned} 8x_1 \qquad\qquad\quad &= 8 \mid :8 \\ 8x_1 - 2x_2 + 2x_3 \qquad &= 4 \mid :2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ 4x_1 - 2x_2 \qquad\qquad &= 2 \mid :2 \end{aligned} \qquad \text{und} \qquad \begin{aligned} x_1 \qquad\qquad\quad &= 1 &&\cdot(-2) \\ 4x_1 - x_2 + x_3 \qquad &= 2 &&\cdot(-1) \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 1 &&+ \\ 2x_1 - x_2 \qquad\qquad &= 1 &&+ \end{aligned}$$

sowie desweiteren

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad\quad &= 1 &&\cdot(-4) \quad \cdot 2 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 \qquad &= 2 &&+ \quad + \\ -2x_1 \qquad\qquad - x_4 &= -1 &&+ \\ -x_2 \qquad\qquad &= -1, &&\cdot(-1) \end{aligned}$$

woraus sich die *eindeutige* Lösung $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = x_4 = -1$ ergibt. Damit ist $u = v_1 + v_2 - v_3 - v_4 \in U$ die *einzige* Funktion, die im Durchschnitt $\cap_{k=1}^4 M_k$ aller vier affinen Hyperebenen liegt. $\square$

Aufgabe 4. Man bestimme den Durchschnitt $M_1 \cap M_2 \cap M_3 \subset \mathbb{R}^3$, den die drei affinen Hyperebenen

$$\begin{aligned} M_1 &= \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 8\}, \\ M_2 &= \{x \in \mathbb{R}^3 \mid -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5\}, \\ M_3 &= \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -2\} \end{aligned}$$

in $\mathbb{R}^3$ gemeinsam haben!

Lösung. Die Vektoren $x \in \mathbb{R}^3$, die zum Durchschnitt $M_1 \cap M_2 \cap M_3$ gehören, sind gerade die Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcl} 4x_1 &+& 2x_2 &+& 2x_3 &=& 8 \\ -x_1 &+& 2x_2 &+& 3x_3 &=& 5 \\ 2x_1 &+& 3x_2 &-& 2x_3 &=& -2. \end{array}$$

Äquivalente Umformungen liefern zunächst

$$\begin{array}{rcrcrcl} & & 10x_2 &+& 14x_3 &=& 28 \mid :2 \\ -x_1 &+& 2x_2 &+& 3x_3 &=& 5 \mid \cdot 5 \\ & & 7x_2 &+& 4x_3 &=& 8 \mid \cdot 5 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{rcrcrcl} & & 5x_2 &+& 7x_3 &=& 14 \\ -5x_1 &+& 10x_2 &+& 15x_3 &=& 25 \\ & & 35x_2 &+& 20x_3 &=& 40 \end{array}$$

sowie desweiteren

$$\begin{array}{rcrcrcl} & & 5x_2 &+& 7x_3 &=& 14 \\ -5x_1 & & &+& x_3 &=& -3 \\ & & & & -29x_3 &=& -58 \mid :29 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{rrrcl} & 5x_2 & &=& 0 \mid :5 \\ -5x_1 & & &=& -5 \mid :(-5) \\ & & -x_3 &=& -2. \mid \cdot(-1) \end{array}$$

Das Gleichungssystem besitzt die eindeutige Lösung $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$. Die drei Ebenen M_1, M_2 und M_3 im Raum $\mathbb{R}^3$ haben somit den Vektor $x \in \mathbb{R}^3$ mit diesen Koordinaten gemeinsam. □

Aufgabe 5. Seien zwei Verschiebungsvektoren $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ sowie zwei Richtungsvektoren $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^3$ durch

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ \tau \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Wie muß die dritte Koordinate $\tau \in \mathbb{R}$ von v_1 gewählt werden, damit sich die beiden affinen Geraden $\{v_1 + \lambda w_1 \in \mathbb{R}^3 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ und $\{v_2 + \mu w_2 \in \mathbb{R}^3 \mid \mu \in \mathbb{R}\}$ schneiden und welche Koordinaten hat dieser Durchschnitt?

Lösung. Damit sich beide Geraden schneiden, muß die Vektorgleichung $v_1 + \lambda w_1 = v_2 + \mu w_2$ und somit das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2 + 2\lambda &= 2 + \mu \\ 2 + 3\lambda &= 5 + 2\mu \\ \tau + \lambda &= 1 + \mu \end{aligned} \qquad \text{und somit} \qquad \begin{array}{rcll} 2\lambda - \mu &=& 0 & \cdot(-2) \quad \cdot(-1) \\ 3\lambda - 2\mu &=& 3 & + \\ \tau + \lambda - \mu &=& 1 & \qquad\quad + \end{array}$$

eine Lösung $\tau, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ besitzen. Äquivalente Umformungen liefern

$$\begin{array}{rcll} 2\lambda - \mu &=& 0 & \qquad + \\ -\lambda &=& 3 & \cdot(-1) \quad \cdot 2 \\ \tau - \lambda &=& 1 & + \end{array} \qquad \text{und damit} \qquad \begin{array}{rcll} -\mu &=& 6 & + \\ -\lambda &=& 3 & \cdot 2 \\ \tau &=& -2. & \end{array}$$

Somit hat das lineare Gleichungssystem die Lösung $\tau = -2$, $\lambda = -3$, $\mu = -6$. In diesem Falle ist $\{x\} = \{v_2 + \mu w_2\}$ der Durchschnitt der beiden Geraden, wobei $x = v_2 + \mu w_2 \in \mathbb{R}^3$ die Koordinaten $x_1 = -4$, $x_2 = -7$, $x_3 = -5$ hat. $\square$

Aufgabe 6. Unter welchen Bedingungen an $u, v \in \mathbb{R}^3$ sowie $\xi \in \mathbb{R}^3$, $\kappa \in \mathbb{R}$ ist die affine Gerade $G = \{v + \lambda u \in \mathbb{R}^3 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ eine Teilmenge der affinen Hyperebene $M = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = \kappa\}$?

Lösung. 1. Um von einer Gerade G bzw. einer Ebene M sprechen zu können, nimmt man an, daß sowohl $u \neq 0$ als auch $\xi \neq 0$ gilt. Damit $G \subset M$ gilt, muß die Gleichung

$$\xi_1(v_1 + \lambda u_1) + \xi_2(v_2 + \lambda u_2) + \xi_3(v_3 + \lambda u_3) = \kappa \quad \text{für jedes } \lambda \in \mathbb{R}$$

erfüllt sein, das heißt, es muß

$$\lambda(\xi_1 u_1 + \xi_2 u_2 + \xi_3 u_3) = \kappa - (\xi_1 v_1 + \xi_2 v_2 + \xi_3 v_3) \quad \text{für jedes } \lambda \in \mathbb{R}$$

gelten. Durch Koeffizientenvergleich bzgl. Termen gleicher Ordnung in λ ergeben sich die Bedingungen $\xi_1 u_1 + \xi_2 u_2 + \xi_3 u_3 = 0$ sowie $\xi_1 v_1 + \xi_2 v_2 + \xi_3 v_3 = \kappa$.

2. Die Bedingung $\xi_1 v_1 + \xi_2 v_2 + \xi_3 v_3 = \kappa$ erfordert, daß der Verschiebungsvektor v der Gerade G zur Ebene M gehört. Die Bedingung $\xi_1 u_1 + \xi_2 u_2 + \xi_3 u_3 = 0$ bedeutet, daß der Richtungsvektor u der Gerade G in der zu $M = \{v + w \in \mathbb{R}^3 \mid w \in U\}$ parallelen linearen Hyperebene $U = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0\}$ liegt. □

Aufgabe 7. Unter welchen Bedingungen an $u, w, v \in \mathbb{R}^3$ sowie $\xi \in \mathbb{R}^3$, $\kappa \in \mathbb{R}$ stimmt die affine Hyperebene $M_1 = \{v + \lambda u + \mu w \in \mathbb{R}^3 \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ mit der affinen Hyperebene $M_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = \kappa\}$ überein?

Lösung. 1. Um von Ebenen M_1, M_2 sprechen zu können, muß man voraussetzen, daß $\xi \neq 0$ gilt und die Vektoren $u, w \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängig sind. Wenn $M_1 \subset M_2$ und damit $M_1 = M_2$ gelten soll, muß die Gleichung

$$\xi_1(v_1 + \lambda u_1 + \mu w_1) + \xi_2(v_2 + \lambda u_2 + \mu w_2) + \xi_3(v_3 + \lambda u_3 + \mu w_3) = \kappa$$

für jedes $\lambda, \kappa \in \mathbb{R}$ gelten, das heißt, es muß

$$\lambda(\xi_1 u_1 + \xi_2 u_2 + \xi_3 u_3) + \mu(\xi_1 w_1 + \xi_2 w_2 + \xi_3 w_3) = \kappa - (\xi_1 v_1 + \xi_2 v_2 + \xi_3 v_3)$$

für alle λ, $\mu \in \mathbb{R}$ erfüllt sein. Durch Koeffizientenvergleich bzgl. Termen gleicher Ordnung in λ bzw. μ ergeben sich die Bedingungen $\xi_1 u_1 + \xi_2 u_2 + \xi_3 u_3 = 0$ und $\xi_1 w_1 + \xi_2 w_2 + \xi_3 w_3 = 0$ sowie $\xi_1 v_1 + \xi_2 v_2 + \xi_3 v_3 = \kappa$.

2. Die Bedingung $\xi_1 v_1 + \xi_2 v_2 + \xi_3 v_3 = \kappa$ bedeutet, daß der Verschiebungsvektor v von M_1 auch zu M_2 gehört. Die beiden Bedingungen $\xi_1 u_1 + \xi_2 u_2 + \xi_3 u_3 = 0$ und $\xi_1 w_1 + \xi_2 w_2 + \xi_3 w_3 = 0$ erfordern, daß die zu M_1 und M_2 parallelen linearen Hyperebenen $U_1 = \operatorname{lin}\{u, w\}$ und $U_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0\}$ übereinstimmen müssen. □