Übungsaufgaben 5

Matrizenrechnung

Aufgabe 1. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $b \neq 0$, ferner die Funktionen $u_1, u_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$u_1(t) = \exp(at)\cos bt, \quad u_2(t) = \exp(at)\sin bt \quad \text{für } t \in \mathbb{R}$$

sowie der lineare Teilraum $U = \mathrm{lin}\{u_1, u_2\}$ des linearen Raums V aller Funktionen $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ über dem Körper $\mathbb{R}$ vorgegeben. Desweiteren werde der durch $T(u) = Du$ für $u \in U$ definierte lineare Differentialoperator $T \in L(U; U)$ betrachtet.

1. Man zeige, daß $B = \{u_1, u_2\}$ eine Basis von U ist!

2. Man bestimme die Koordinatendarstellung $\Phi_B T \Phi_B^{-1} \in L(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$, welche die Koordinaten $x = \Phi_B(u) \in \mathbb{R}^2$ von $u \in U$ bezüglich der Basis B auf die Bildkoordinaten $y = \Phi_B(T(u)) \in \mathbb{R}^2$ von $T(u) \in U$ bezüglich der Basis B abbildet! Welche Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ hat die Eigenschaft, daß $\big(\Phi_B T \Phi_B^{-1}\big)(x) = Ax$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$ gilt?

3. Man weise nach, daß der lineare Differentialoperator $T \in L(U; U)$ bijektiv ist und bestimme die Koordinatendarstellung $\Phi_B T^{-1} \Phi_B^{-1} \in L(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ der inversen Abbildung $T^{-1} \in L(U; U)$, indem man die inverse Matrix $A^{-1} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ berechnet und ausnutzt, daß $\big(\Phi_B T^{-1} \Phi_B^{-1}\big)(y) = A^{-1}y$ für alle $y \in \mathbb{R}^2$ gilt! ⑧

Lösung. 1. Um einzusehen, daß die Menge $B = \{u_1, u_2\}$ linear unabhängig und somit eine Basis von $U = \mathrm{lin}\{u_1, u_2\}$ ist, seien $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda_1 \exp(at)\cos bt + \lambda_2 \exp(at)\sin bt = 0 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$

beliebig vorgegeben. In der Tat ergibt sich daraus für $t = 0$ einerseits $\lambda_1 = 0$ und für $t = \frac{\pi}{2b}$ andererseits $\lambda_2 = 0$.

2. Für die Koordinaten $x = \Phi_B(u) \in \mathbb{R}^2$ von $u = x_1 u_1 + x_2 u_2 \in U$ bezüglich der Basis $B = \{u_1, u_2\}$ gilt nach Definition $u = \Phi_B^{-1}(x) \in U$. Mit Hilfe der Produkt- und der Kettenregel der Differentialrechnung ergeben sich die beiden Beziehungen $Du_1 = au_1 - bu_2$ sowie $Du_2 = bu_1 + au_2$ und somit

$$\begin{aligned} T(u) &= x_1 Du_1 + x_2 Du_2 = x_1(au_1 - bu_2) + x_2(bu_1 + au_2) \\ &= (ax_1 + bx_2)\,u_1 + (ax_2 - bx_1)\,u_2 \in U. \end{aligned}$$

Deshalb besitzt $T(u) \in U$ die Bildkoordinaten

$$\big(\Phi_B T \Phi_B^{-1}\big)(x) = \Phi_B(T(u)) = \begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 \\ -bx_1 + ax_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^2$$

bezüglich der Basis $B = \{u_1, u_2\}$ von U.

3. Um sich zu vergewissern, daß die Koordinatendarstellung $\Phi_B T \Phi_B^{-1} \in L(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)$ bijektiv ist, soll gezeigt werden, daß das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 &= y_1 \\ -bx_1 + ax_2 &= y_2 \end{aligned}$$

für beliebig vorgegebene Koordinaten $y \in \mathbb{R}^2$ genau eine Lösung $x \in \mathbb{R}^2$ besitzt: Geeignete Umformungen liefern wegen $a^2 + b^2 > 0$ einerseits

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 &= y_1 \\ -bx_1 + ax_2 &= y_2 \mid \cdot (-b) \end{aligned} \qquad \text{und} \qquad \begin{aligned} ax_1 + bx_2 &= y_1 \\ (a^2 + b^2)x_1 &= ay_1 - by_2 \mid : (a^2 + b^2) \end{aligned}$$

sowie andererseits

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 &= y_1 \\ -bx_1 + ax_2 &= y_2 \mid \cdot a \end{aligned} \qquad \text{und} \qquad \begin{aligned} ax_1 + bx_2 &= y_1 \\ (a^2 + b^2)x_2 &= by_1 + ay_2, \mid : (a^2 + b^2) \end{aligned}$$

woraus sich schließlich die Gestalt

$$\big(\Phi_B T^{-1} \Phi_B^{-1}\big)(y) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} ay_1 - by_2 \\ by_1 + ay_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

der inversen Abbildung $\Phi_B T^{-1} \Phi_B^{-1} \in L(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)$ für jedes $y \in \mathbb{R}^2$ ergibt. Wegen der Bijektivität der Koordinatenabbildung $\Phi_B \in L(U;\mathbb{R}^2)$ ist somit $T \in L(U;U)$ ein Isomorphismus von U auf U. $\square$

Aufgabe 2. Seien die Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ und der Vektor $y \in \mathbb{R}^4$ wie folgt gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

1. Man berechne alle Lösungen $x \in \mathbb{R}^3$ des Gleichungssystems $Ax = y$!
2. Man bestimme alle Lösungen $x \in \mathbb{R}^3$ des Gleichungssystems $A^\mathsf{T} A x = A^\mathsf{T} y$! ⑥

Lösung. 1. Elementare Umformungen der dem Gleichungssystem $Ax = y$ zugeordneten erweiterten Matrix

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-1) \\ | \cdot (-1) \\ \leftarrow + \\ \end{array} \quad \text{führen auf} \quad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right).$$

Da die zweite und die dritte Zeile im Widerspruch stehen, hat das Gleichungssystem $Ax = y$ *keine* Lösung $x \in \mathbb{R}^3$.

2. Berechnet man die Matrixprodukte

$$A^\mathsf{T} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

und

$$A^\mathsf{T} y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

dann erkennt man sofort, daß das Gleichungssystem $A^\mathsf{T} A x = A^\mathsf{T} y$ die eindeutige Lösung $x \in \mathbb{R}^3$ mit den Komponenten $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4 \in \mathbb{R}$ hat. □

Aufgabe 3. Sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 3 & 2 & 5 \\ 6 & -3 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

vorgegeben. Man bestimme den Kern $A^{-1}[\{0\}] \subset \mathbb{R}^3$ und den Bildraum $A[\mathbb{R}^3] \subset \mathbb{R}^3$ von $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ sowie den Kern $(A^\intercal)^{-1}[\{0\}] \subset \mathbb{R}^3$ und den Bildraum $A^\intercal[\mathbb{R}^3] \subset \mathbb{R}^3$ der transponierten Matrix $A^\intercal \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ (evtl. unter Ausnutzung der Dualität)! ⑥

Lösung. 1. Im ersten Schritt sollen die beiden Kerne $A^{-1}[\{0\}] = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax = 0\}$ und $(A^\intercal)^{-1}[\{0\}] = \{\eta \in \mathbb{R}^3 \mid A^\intercal\eta = 0\}$ bestimmt werden.

1.1. Um alle Lösungen $x \in \mathbb{R}^3$ der Gleichung $Ax = 0$ zu finden, führen elementare Umformungen der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 3 & 2 & 5 \\ 6 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \mid \cdot 3 \\ \\ \end{array} \quad \text{auf} \quad \begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 9 & 6 & 15 \\ 6 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

und somit zu

$$\begin{pmatrix} 14 & 0 & 14 \\ 21 & 0 & 21 \\ 6 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \mid : 14 \\ \mid : 21 \\ \mid : 3 \end{array} \quad \text{sowie} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x^\circ = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

woraus sich der Kern $A^{-1}[\{0\}] = \operatorname{lin}\{x^\circ\}$ ergibt.

1.2. Um die Lösungen $\eta \in \mathbb{R}^3$ der Gleichung $A^\intercal\eta = 0$ zu berechnen, liefern elementare Umformungen der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 6 & 2 & -3 \\ 8 & 5 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{zunächst} \quad \begin{pmatrix} 14 & 7 & 0 \\ 6 & 2 & -3 \\ 14 & 7 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \mid : 7 \\ \\ \mid : 7 \end{array}$$

und schließlich

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad \eta^\circ = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix},$$

das heißt, man erhält den Kern $(A^\intercal)^{-1}[\{0\}] = \operatorname{lin}\{\eta^\circ\}$.

2. Um die beiden Bildräume $A[\mathbb{R}^3]$ und $A^\top[\mathbb{R}^3]$ zu bestimmen, sollen Dualitätsbetrachtungen angestellt werden.

2.1. Es gilt genau dann $y \in A[\mathbb{R}^3]$, wenn $\eta^\top y = \mathbb{0}$ für alle Lösungen $\eta \in \mathbb{R}^3$ des homogenen Gleichungssystems $A^\top \eta = 0$ gilt. Wegen Schritt 1.2 folgt daraus die Darstellung

$$A[\mathbb{R}^3] = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid 3y_1 - 6y_2 + 2y_3 = 0\}$$

für den Bildraum von A.

2.2. Es gilt genau dann $\xi \in A^\top[\mathbb{R}^3]$, wenn $\xi^\top x = \mathbb{0}$ für alle Lösungen $x \in \mathbb{R}^3$ des homogenen Gleichungssystems $Ax = 0$ gilt. Schritt 1.1 liefert somit die Darstellung

$$A^\top[\mathbb{R}^3] = \{\xi \in \mathbb{R}^3 \mid \xi_1 + \xi_2 - \xi_3 = 0\}$$

für den Bildraum von $A^\top$. $\square$

Aufgabe 4. Seien die Funktionen $v_1, v_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sowie $u_1, u_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$v_1(t) = \exp(t), \quad v_2(t) = \exp(-t), \quad u_1(t) = \cosh t, \quad u_2(t) = \sinh t \quad \text{für } t \in \mathbb{R}$$

sowie der lineare Teilraum $U = \text{lin}\{u_1, u_2\}$ des linearen Raums V aller Funktionen $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ über dem Körper $\mathbb{R}$ gegeben. Desweiteren werde der durch $T(u) = Du$ für $u \in U$ definierte lineare Differentialoperator $T \in L(U; U)$ betrachtet.

1. Man zeige, daß $B = \{v_1, v_2\}$ und $C = \{u_1, u_2\}$ Basen von U sind!
2. Man bestimme diejenige Abbildung $\Phi_C T \Phi_B^{-1} \in L(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$, welche die Koordinaten $x = \Phi_B(u) \in \mathbb{R}^2$ von $u \in U$ bezüglich der Basis B auf die Bildkoordinaten $y = \Phi_C(T(u)) \in \mathbb{R}^2$ von $T(u) \in U$ bezüglich der Basis C abbildet! Welche Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ hat die Eigenschaft, daß $\big(\Phi_C T \Phi_B^{-1}\big)(x) = Ax$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$ gilt?

Lösung. 1. Um einzusehen, daß die Menge $C = \{u_1, u_2\}$ linear unabhängig und somit eine Basis von $U = \text{lin}\{u_1, u_2\}$ ist, seien $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda_1 \cosh t + \lambda_2 \sinh t = 0 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$

beliebig vorgegeben. In der Tat ergibt sich für $t = 0$ zunächst $\lambda_1 = 0$ und für $t = 1$ schließlich auch $\lambda_2 = 0$. Werden $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$(\mu_1 + \mu_2)\cosh t + (\mu_1 - \mu_2)\sinh t = \mu_1 \exp(t) + \mu_2 \exp(-t) = 0 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$

beliebig vorgegeben, so folgt wie zuvor $\mu_1 + \mu_2 = \mu_1 - \mu_2 = 0$, also $\mu_1 = \mu_2 = 0$. Damit ist die Menge $B = \{v_1, v_2\}$ linear unabhängig und wegen $v_1 = u_1 + u_2 \in U$ und $v_2 = u_1 - u_2 \in U$ auch eine Basis von U.

2. Für die Koordinaten $x = \Phi_B(u) \in \mathbb{R}^2$ von $u = x_1 v_1 + x_2 v_2 \in U$ bezüglich der Basis $B = \{v_1, v_2\}$ gilt nach Definition $u = \Phi_B^{-1}(x) \in U$. Durch Differentiation ergibt sich wegen $Dv_1 = v_1$ und $Dv_2 = -v_2$ die Beziehung

$$T(u) = x_1 Dv_1 + x_2 Dv_2 = x_1 v_1 - x_2 v_2 \in U$$

und somit wegen $v_1 = u_1 + u_2$ und $v_2 = u_1 - u_2$ schließlich

$$T(u) = x_1(u_1 + u_2) - x_2(u_1 - u_2) = (x_1 - x_2)u_1 + (x_1 + x_2)u_2 \in U.$$

Deshalb besitzt $T(u) \in U$ die Bildkoordinaten

$$\big(\Phi_C T \Phi_B^{-1}\big)(x) = \Phi_C(T(u)) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^2$$

bezüglich der Basis $C = \{u_1, u_2\}$ von U. $\square$

Aufgabe 5. Seien die beiden Hyperebenen

$$V = \{z \in \mathbb{R}^3 \mid z_3 = 0\}, \quad W = \{z \in \mathbb{R}^3 \mid z_1 = 0\} \quad \text{in } \mathbb{R}^3,$$

die vier Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in V, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in V, \quad w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in W, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \in W.$$

und die Standardbasis $\{e_1, e_2, e_3\}$ in $\mathbb{R}^3$ vorgegeben. Offenbar sind $B = \{e_1, e_2\}$ sowie $\{v_1, v_2\}$ Basen in V und $C = \{e_2, e_3\}$ sowie $\{w_1, w_2\}$ Basen in W.

Sei $T \in L(V; W)$ jene lineare Abbildung, welche durch die Vorgabe der Bilder $T(v_1) = w_1$ und $T(v_2) = w_2$ eindeutig festgelegt wird. Man bestimme die Koordinatendarstellung $\Phi_C T \Phi_B^{-1} \in L(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$, welche die Koordinaten $x = \Phi_B(v) \in \mathbb{R}^2$ von $v \in V$ bzgl. der Basis B auf die Bildkoordinaten $y = \Phi_C(T(v)) \in \mathbb{R}^2$ von $T(v) \in W$ bzgl. der Basis C abbildet! Welche Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ hat die Eigenschaft, daß $\big(\Phi_C T \Phi_B^{-1}\big)(x) = Ax$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$ gilt?

Lösung. 1.1. Da jeder Vektor $v = x_1 e_1 + x_2 e_2 \in V$ bzgl. der Basis $B = \{e_1, e_2\}$ die Koordinaten $x = \Phi_B(v) \in \mathbb{R}^2$ besitzt, erhält man zunächst

$$\Phi_B(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad \Phi_B(v_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

1.2. Da jeder Vektor $w = y_1 e_2 + y_2 e_3 \in W$ bzgl. der Basis $C = \{e_2, e_3\}$ die Koordinaten $y = \Phi_C(w) \in \mathbb{R}^2$ hat, ergibt sich analog dazu

$$\Phi_C(w_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad \Phi_C(w_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

2.1. Da die gesuchte Koordinatendarstellung $\Phi_C T \Phi_B^{-1} \in L(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ für jeden Index $\ell \in \{1, 2\}$ jeweils die Koordinaten $\Phi_B(v_\ell) \in \mathbb{R}^2$ auf $\Phi_C(T(v_\ell)) = \Phi_C(w_\ell) \in \mathbb{R}^2$ abbildet, sucht man nach einer Lösung $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ der Matrixgleichung $AX = Y$ für

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \quad \text{und} \quad Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

2.2. Eine elementare Umformung der erweiterten Matrix

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \cdot(-2) \end{array} \quad \text{führt auf} \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

und somit zu

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{woraus sich} \quad A = YX^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

ergibt. □

Aufgabe 6. Seien $n \in \mathbb{N}$, $V = \mathbb{K}^{n \times n}$ der lineare Raum aller $(n \times n)$-Matrizen über dem Körper $\mathbb{K}$ sowie die folgenden Teilmengen vorgegeben:

$$V_0 = \big\{A \in V \mid A^\top = A\big\},$$
$$V_1 = \big\{A \in V \mid A^\top = -A\big\}.$$

1. Man zeige, daß V_0 und V_1 komplementäre lineare Teilräume von V sind, das heißt, daß $V = V_0 + V_1$ und $V_0 \cap V_1 = \{0\}$ gilt!

2. Man weise nach, daß $\dim V_0 = \frac{1}{2}n(n+1)$ und $\dim V_1 = \frac{1}{2}n(n-1)$ gilt!

Lösung. 1.1. In der Tat sind V_0 und V_1 lineare Teilräume von V, denn es gilt

$$(\lambda A + \mu T)^\top = \lambda A^\top + \mu T^\top = \lambda A + \mu T$$

für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $A, T \in V_0$, also $\lambda A + \mu T \in V_0$, sowie desweiteren

$$(\lambda A + \mu T)^\top = \lambda A^\top + \mu T^\top = -(\lambda A + \mu T)$$

für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $A, T \in V_1$, also $\lambda A + \mu T \in V_1$.

1.2. Ferner läßt sich jede Matrix $A \in V$ durch die Vorschrift

$$A_0 = \tfrac{1}{2}\big(A + A^\top\big), \quad A_1 = \tfrac{1}{2}\big(A - A^\top\big)$$

in eine Summe $A = A_0 + A_1$ von Matrizen $A_0, A_1 \in V$ zerlegen, wobei

$$A_0^\top = \tfrac{1}{2}\big(A^\top + A\big) = \tfrac{1}{2}\big(A + A^\top\big) = A_0, \quad A_1^\top = \tfrac{1}{2}\big(A^\top - A\big) = -\tfrac{1}{2}\big(A - A^\top\big) = -A_1$$

gilt. Daraus folgt $A_0 \in V_0$ sowie $A_1 \in V_1$, das heißt, V ist die Summe der beiden Teilräume V_0 und V_1. Um einzusehen, daß V_0 und V_1 in V *komplementär* sind, genügt der Nachweis der Beziehung $V_0 \cap V_1 = \{0\}$: Für jede Matrix $A \in V_0 \cap V_1$ gilt in der Tat $A = A^\top = -A$, also $2A = 0$ und somit $A = 0$.

2.1. Erklärt man die Matrix $A_{k\ell} = (a_{ij}) \in V$ für beliebig fixierte Indizes $k, \ell \in \{1, \dots, n\}$ für $i, j \in \{1, \dots, n\}$ durch $a_{ij} = \mathbb{1}$ im Falle $(i, j) = (k, \ell)$ sowie $a_{ij} = \mathbb{0}$ im Falle $(i, j) \neq (k, \ell)$, dann ist das System $\big\{A_{k\ell} \in V \mid k, \ell \in \{1, \dots, n\}\big\}$ eine Basis in V, woraus sich $\dim V = n^2$ ergibt.

2.2. Wegen $A_{k\ell}^\top = A_{\ell k}$ folgt daraus zunächst

$$V_0 = \operatorname{lin}\big\{A_{k\ell} + A_{\ell k} \in V \mid k, \ell \in \{1, \dots, n\}\big\},$$
$$V_1 = \operatorname{lin}\big\{A_{k\ell} - A_{\ell k} \in V \mid k, \ell \in \{1, \dots, n\}\big\}.$$

Aus Symmetriegründen ergibt sich schließlich

$$V_0 = \operatorname{lin}\big\{A_{k\ell} + A_{\ell k} \in V \mid k, \ell \in \{1, \dots, n\}, k \leq \ell\big\},$$
$$V_1 = \operatorname{lin}\big\{A_{k\ell} - A_{\ell k} \in V \mid k, \ell \in \{1, \dots, n\}, k < \ell\big\}$$

und damit $\dim V_0 = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$ sowie $\dim V_1 = \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{1}{2}n(n-1)$. $\square$