Übungsaufgaben 6

Determinanten und Eigenwertprobleme

Aufgabe 1. Man finde jeweils durch Auswertung der Determinantengleichung

$$\begin{vmatrix} x_1 - w_1 & x_2 - w_2 & x_3 - w_3 \\ y_1 - w_1 & y_2 - w_2 & y_3 - w_3 \\ z_1 - w_1 & z_2 - w_2 & z_3 - w_3 \end{vmatrix} = 0$$

Parameter $\xi \in \mathbb{R}^3$ und $\mu \in \mathbb{R}$ derjenigen affinen Hyperebene

$$\{x \in \mathbb{R}^3 \mid \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = \mu\}$$

in $\mathbb{R}^3$, welche jeweils durch die drei Punkte

(1) $\quad y = (1, 1, 1), \quad z = (0, 2, 1), \quad w = (0, 1, 1),$

(2) $\quad y = (1, 2, 3), \quad z = (3, 0, 7), \quad w = (0, 1, -1),$

hindurchgeht! ⑥

Lösung. 1. Für die Punkte $y = (1, 1, 1)$, $z = (0, 2, 1)$ und $w = (0, 1, 1)$ ergibt sich aus der Determinantengleichung

$$0 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 - 1 & x_3 - 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 - 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = x_3 - 1$$

durch Entwicklung der Determinante nach der letzten Zeile und damit die gesuchte affine Hyperebene $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 1\}$.

2. Für die Punkte $y = (1, 2, 3)$, $z = (3, 0, 7)$ und $w = (0, 1, -1)$ folgt aus der Determinantengleichung

$$0 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 - 1 & x_3 + 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 - 1 & x_3 + 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 12 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 & x_2 - 1 & x_3 - 3x_1 + 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 4(3x_1 + x_2 - x_3 - 2)$$

durch Entwicklung der Determinante nach der letzten Zeile die gewünschte Darstellung $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid 3x_1 + x_2 - x_3 = 2\}$ der affinen Hyperebene. □

Aufgabe 2. Seien die Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 7 & 12 & -8 \\ -2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3} \quad \text{gegeben.}$$

1. Man weise nach, daß die Matrizen A_1 und A_2 diagonalisierbar sind!

2. Man bestimme für jedes $k \in \{1, 2\}$ eine Basis B_k von $\mathbb{C}^3$ aus Eigenvektoren, so daß die Matrix $\Phi_{B_k} A_k \Phi_{B_k}^{-1} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ Diagonalgestalt erhält! ⑧

Lösung. 1.1. Die Auswertung der charakteristischen Gleichung $\det(A_1 - \lambda E_3) = 0$ zur Findung der Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{C}$ liefert

$$0 = \begin{vmatrix} 7-\lambda & 12 & -8 \\ -2 & -3-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \begin{vmatrix} 7-\lambda & 12 \\ -2 & -3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 6-2\lambda \\ -2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2(1-\lambda),$$

wobei die Determinante nach der dritten Zeile entwickelt wurde. Somit besitzt die Matrix $A_1 \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$.

1.2. Um die zugehörigen Eigenvektoren $v_\ell \in \mathbb{C}^3$ für $\ell \in \{1, 2, 3\}$ zu bestimmen, werden die Lösungen des Gleichungssystems $(A_1 - \lambda_\ell E_3)v_\ell = 0$ berechnet:

Im Falle $\lambda_1 = 1$ führen elementare Umformungen der Matrix

$$\begin{pmatrix} 6 & 12 & -8 \\ -2 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} +\quad\quad + \\ \cdot 3 \quad + \\ \cdot(-2) \quad \cdot(-2) \end{matrix} \quad \text{auf} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Daher ist $U_1(\lambda_1) = \operatorname{lin}\{v_1\}$ der Eigenraum zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$.

Für $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$ führen elementare Umformungen der Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & 12 & -8 \\ -2 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} + \\ \cdot 2 \\ \end{matrix} \quad \text{auf} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist $U_1(\lambda_2) = \operatorname{lin}\{v_2, v_3\}$ der Eigenraum zum Eigenwert $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$.

1.3. Somit ist nachgewiesen, daß $B_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis von Eigenvektoren des $\mathbb{C}^3$ und $A_1 \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ diagonalisierbar ist. Es gilt $A_1 v_\ell = \lambda_\ell v_\ell$ für jedes $\ell \in \{1, 2, 3\}$, woraus sich die Diagonalgestalt

$$\Phi_{B_1} A_1 \Phi_{B_1}^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$$

ergibt.

2.1. Die Auswertung der charakteristischen Gleichung $\det(A_2 - \mu E_3) = \mathbb{0}$ zur Bestimmung der Nullstellen $\mu \in \mathbb{C}$ liefert

$$\mathbb{0} = \begin{vmatrix} \mathbb{1}-\mu & \mathbb{0} & \mathbb{1} \\ \mathbb{0} & \mathbb{1}-\mu & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \mathbb{1} & -\mu \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbb{1}-\mu & \mathbb{0} & \mathbb{1} \\ \mathbb{0} & \mathbb{1}-\mu & \mathbb{1} \\ \mu & \mathbb{1} & -\mathbb{1}-\mu \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbb{2}-\mu & \mathbb{0} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \mathbb{1}-\mu & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & \mathbb{1} & -\mathbb{1}-\mu \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbb{2}-\mu & \mathbb{0} & \mathbb{1} \\ \mathbb{2}-\mu & \mathbb{1}-\mu & \mathbb{1} \\ \mathbb{0} & \mathbb{1} & -\mathbb{1}-\mu \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbb{2}-\mu & \mathbb{0} & \mathbb{1} \\ \mathbb{0} & \mathbb{1}-\mu & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{1} & -\mathbb{1}-\mu \end{vmatrix} = (\mathbb{2}-\mu)(\mathbb{1}-\mu)(-\mathbb{1}-\mu).$$

Folglich hat die Matrix $A_2 \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ drei verschiedene Eigenwerte $\mu_1 = -\mathbb{1}$, $\mu_2 = \mathbb{1}$ und $\mu_3 = \mathbb{2}$, ist also diagonalisierbar.

2.2. Um die zugehörigen Eigenvektoren $u_\ell \in \mathbb{C}^3$ für $\ell \in \{1,2,3\}$ zu ermitteln, werden die Lösungen des Gleichungssystems $(A_2 - \mu_\ell E_3)u_\ell = 0$ berechnet:

Im Falle $\mu_1 = -\mathbb{1}$ führen elementare Umformungen der Matrix

$$\begin{pmatrix} \mathbb{2} & \mathbb{0} & \mathbb{1} \\ \mathbb{0} & \mathbb{2} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \mathbb{1} & \mathbb{1} \end{pmatrix} \quad \text{auf} \quad \begin{pmatrix} \mathbb{2} & \mathbb{0} & \mathbb{1} \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ -\mathbb{1} & \mathbb{1} & \mathbb{0} \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad u_1 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} \\ \mathbb{1} \\ -\mathbb{2} \end{pmatrix}.$$

Somit ist $U_1(\mu_1) = \operatorname{lin}\{u_1\}$ der Eigenraum zum Eigenwert $\mu_1 = -\mathbb{1}$.

Für $\mu_2 = \mathbb{1}$ liefern elementare Umformungen der Matrix

$$\begin{pmatrix} \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{1} \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \mathbb{1} & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \quad \text{zunächst} \quad \begin{pmatrix} \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \mathbb{1} & \mathbb{0} \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad u_2 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} \\ \mathbb{0} \end{pmatrix}.$$

Damit ist $U_1(\mu_2) = \operatorname{lin}\{u_2\}$ der Eigenraum zum Eigenwert $\mu_2 = \mathbb{1}$.

Für $\mu_3 = \mathbb{2}$ gelangt man durch elementare Umformungen der Matrix

$$\begin{pmatrix} -\mathbb{1} & \mathbb{0} & \mathbb{1} \\ \mathbb{0} & -\mathbb{1} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \mathbb{1} & -\mathbb{2} \end{pmatrix} \quad \text{zu} \quad \begin{pmatrix} -\mathbb{1} & \mathbb{0} & \mathbb{1} \\ \mathbb{0} & -\mathbb{1} & \mathbb{1} \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad u_3 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} \\ \mathbb{1} \\ \mathbb{1} \end{pmatrix}.$$

Damit ist $U_1(\mu_3) = \{u_3\}$ der Eigenraum zum Eigenwert $\mu_3 = \mathbb{2}$.

2.3. Damit ist gezeigt, daß $B_2 = \{u_1, u_2, u_3\}$ eine Basis von Eigenvektoren des Raums $\mathbb{C}^3$ und $A_2 \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ diagonalisierbar ist. Es gilt somit $A_2 u_\ell = \mu_\ell u_\ell$ für jedes $\ell \in \{1,2,3\}$, woraus die Diagonalgestalt

$$\Phi_{B_2} A_2 \Phi_{B_2}^{-1} = \begin{pmatrix} \mu_1 & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mu_2 & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mu_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbb{1} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & 1 & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$$

folgt. $\square$

Aufgabe 3. Sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3} \quad \text{gegeben.}$$

1. Man zeige, daß die Matrix $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ einen dreifachen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ besitzt und *nicht* diagonalisierbar ist!

2. Man bestimme einen Eigenvektor $v_1 \in \mathbb{C}^3$ mit $Av_1 - \lambda v_1 = 0$ und $v_1 \neq 0$, einen Vektor $v_2 \in \mathbb{C}^3$ mit $Av_2 - \lambda v_2 = v_1$ und $v_2 \notin \operatorname{lin}\{v_1\}$ sowie einen Vektor $v_3 \in \mathbb{C}^3$ mit $Av_3 - \lambda v_3 = v_2$ und $v_3 \notin \operatorname{lin}\{v_1, v_2\}$!

3. Welche Koordinatendarstellung $\Phi_B A \Phi_B^{-1} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ hat die Matrix $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ bzgl. der Basis $B = \{v_1, v_2, v_3\}$? ⑥

Lösung. 1. Die Auswertung der charakteristischen Gleichung $\det(A - \lambda E_3) = 0$ zur Bestimmung der Nullstellen $\lambda \in \mathbb{C}$ liefert

$$0 = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & \lambda-1 \\ 0 & 2-\lambda & 2-\lambda \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 2-\lambda \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^3$$

und somit den algebraisch dreifachen Eigenwert $\lambda = 2$.

2.1. Die zugehörigen Eigenvektoren $v \in \mathbb{C}^3$ von A ergeben sich als Lösungen des Gleichungssystems $(A - \lambda E_3)v = 0$. Elementare Umformungen der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{ergeben} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Somit erzeugt } v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bereits den Eigenraum $(A - \lambda E_3)^{-1}[\{0\}] = \operatorname{lin}\{v_1\}$ zum dreifachen Eigenwert $\lambda = 2$, das heißt, A ist *nicht* diagonalisierbar.

2.2. Einen zum Eigenvektor $v_1 \in \mathbb{C}^3$ beigeordneten Vektor $v_2 \in \mathbb{C}^3$ erhält man durch die Lösung des Gleichungssystems $(A - \lambda E_3)v_2 = v_1$. Elementare Umformungen der erweiterten Matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \quad \text{liefern} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right). \text{ Somit ist } v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine Lösung der Gleichung $(A - \lambda E_3)v_2 = v_1$ mit $v_2 \notin \operatorname{lin}\{v_1\}$.

2.3. Schließlich wird ein zum Vektor $v_2 \in \mathbb{C}^3$ beigeordneter Vektor $v_3 \in \mathbb{C}^3$ als Lösung des Gleichungssystems $(A - \lambda E_3)v_3 = v_2$ bestimmt. Elementare Umformungen der erweiterten Matrix

$$\begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{1} & \mathbb{0} & | & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & \mathbb{0} & \mathbb{1} & | & \mathbb{0} \\ \mathbb{1} & \mathbb{0} & -\mathbb{1} & | & \mathbb{0} \end{pmatrix} \quad \text{liefern} \quad \begin{pmatrix} \mathbb{0} & \mathbb{1} & \mathbb{1} & | & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & \mathbb{0} & \mathbb{1} & | & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & | & \mathbb{0} \end{pmatrix}. \text{ Damit ist } v_3 = \begin{pmatrix} \mathbb{0} \\ \mathbb{1} \\ \mathbb{0} \end{pmatrix}$$

eine Lösung der Gleichung $(A - \lambda E_3)v_3 = v_2$ mit $v_3 \notin \operatorname{lin}\{v_1, v_2\}$.

3. Damit ist $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis von $\mathbb{C}^3$, und es gilt

$$Av_1 = \lambda v_1, \quad Av_2 = \lambda v_2 + v_1, \quad Av_3 = \lambda v_3 + v_2,$$

woraus sich die Koordinatendarstellung

$$\Phi_B A \Phi_B^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & \mathbb{1} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \lambda & \mathbb{1} \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{2} & \mathbb{1} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{2} & \mathbb{1} \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$$

als obere Dreiecksmatrix in Jordan-Normalform ergibt. $\square$

Aufgabe 4. Man untersuche die Invertierbarkeit der Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & -6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

und berechne gegebenenfalls die Inversen mit Hilfe von Determinanten!

Lösung. Zur Überprüfung der Invertierbarkeit der Matrizen A_1 und A_2 berechnet man zuerst die Determinanten

$$\det(A_1) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

sowie

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 7 & 7 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 21 & 7 & 24 \\ 7 & 3 & 8 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 21 & 24 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 0.$$

Somit ist A_1 invertierbar, A_2 jedoch nicht. Die Inverse von A_1 soll mit Hilfe der Cramer-Formel bestimmt werden: Die modifizierten Matrizen, in denen jeweils eine Spalte durch einen Einheitsvektor ersetzt wird, haben die Determinanten

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 4 \end{vmatrix} = 2, \qquad \begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 4 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 4 \end{vmatrix} = -1,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -1, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -2, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 1,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 3, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

die sich jeweils leicht durch Entwicklung nach diesen neuen Spalten berechnen lassen. Wegen $\det(A_1) = -1$ liefert die Cramer-Regel schließlich

$$A_1^{-1} = \frac{1}{\det(A_1)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

für die Inverse von A_1. □

Aufgabe 5. Man weise nach, daß die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4+2i & 6+6i & 4+4i \\ -3+i & -5+i & -4 \\ 3-3i & 6-6i & 5-3i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$$

diagonalisierbar ist und bestimme eine Basis B von $\mathbb{C}^3$ aus Eigenvektoren, so daß die Matrix $\Phi_B A \Phi_B^{-1} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ Diagonalgestalt erhält! ⑧

Lösung. 1. Zur Auswertung der charakteristischen Gleichung $\det(A-\mu E_3) = 0$ führt man zunächst elementare Umformungen

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} 4+2i-\mu & 6+6i & 4+4i \\ -3+i & -5+i-\mu & -4 \\ 3-3i & 6-6i & 5-3i-\mu \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 4+2i-\mu & -2+2i+2\mu & 4+4i \\ -3+i & 1-i-\mu & -4 \\ 3-3i & 0 & 5-3i-\mu \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -2+4i-\mu & 0 & -4+4i \\ -3+i & 1-i-\mu & -4 \\ 3-3i & 0 & 5-3i-\mu \end{vmatrix} \end{aligned}$$

und anschließend eine Entwicklung nach der zweiten Spalte durch und erhält

$$\begin{aligned} 0 &= (1-i-\mu)\begin{vmatrix} -2+4i-\mu & -4+4i \\ 3-3i & 5-3i-\mu \end{vmatrix} = (1-i-\mu)\begin{vmatrix} 2-\mu & -4+4i \\ -2+\mu & 5-3i-\mu \end{vmatrix} \\ &= (1-i-\mu)\begin{vmatrix} 2-\mu & -4+4i \\ 0 & 1+i-\mu \end{vmatrix} = (2-\mu)(1-i-\mu)(1+i-\mu). \end{aligned}$$

Die Matrix $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ hat die drei Eigenwerte $\mu_1 = 1+i$, $\mu_2 = 1-i$ und $\mu_3 = 2$.

2. Um die zugehörigen Eigenvektoren $u_\ell \in \mathbb{C}^3$ für $\ell \in \{1,2,3\}$ zu ermitteln, werden die Lösungen des Gleichungssystems $(A-\mu_\ell E_3)u_\ell = 0$ berechnet:

Für $\mu_1 = 1+i$ gelangt man durch elementare Umformungen der Matrix

$$\begin{pmatrix} 3+i & 6+6i & 4+4i \\ -3+i & -6 & -4 \\ 3-3i & 6-6i & 4-4i \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 2i & 6i & 4i \\ -3+i & -6 & -4 \\ -2i & -6i & -4i \end{pmatrix}$$

sowie desweiteren

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1+i & 0 & 0 \\ -2i & -6i & -4i \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \mid : (i-1) \\ \mid : 2i \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}, \quad \text{also } u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Damit ist $U_1(\mu_1) = \operatorname{lin}\{u_1\}$ der Eigenraum zum Eigenwert $\mu_1 = 1+i$.

Für $\mu_2 = 1 - i$ liefern elementare Umformungen der Matrix

$$\begin{pmatrix} 3+3i & 6+6i & 4+4i \\ -3+i & -6+2i & -4 \\ 3-3i & 6-6i & 4-2i \end{pmatrix} \begin{array}{l} + \\ \\ + \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 4i & 8i & 4i \\ -3+i & -6+2i & -4 \\ -2i & -4i & -2i \end{pmatrix} \begin{array}{l} + \\ + \\ \cdot 2i \quad \cdot 2 \end{array}$$

sowie ferner

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1+i & 2+2i & 0 \\ -2i & -4i & -2i \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \mid : (1+i) \\ \mid : 2i \quad + \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ist $U_1(\mu_2) = \operatorname{lin}\{u_2\}$ der Eigenraum zum Eigenwert $\mu_2 = 1 - i$.

Im Falle $\mu_3 = 2$ führen elementare Umformungen der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2+2i & 6+6i & 4+4i \\ -3+i & -7+i & -4 \\ 3-3i & 6-6i & 3-3i \end{pmatrix} \begin{array}{l} \mid \cdot (1-i) \\ \\ \mid \cdot (2+2i) \end{array} \quad \text{auf} \quad \begin{pmatrix} 4 & 12 & 8 \\ -3+i & -7+i & -4 \\ 12 & 24 & 12 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \mid : 4 \\ \\ \mid : 6 \end{array}$$

sowie desweiteren

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3+i & -7+i & -4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot 2 \quad \cdot (-1) \\ + \\ + \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1+i & -1+i & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} + \\ + \\ \cdot (1-i) \quad \cdot (-1) \end{array}$$

und schließlich

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Somit ist $U_1(\mu_3) = \operatorname{lin}\{u_3\}$ der Eigenraum zum Eigenwert $\mu_3 = 2$.

3. Damit ist gezeigt, daß $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ eine Basis von $\mathbb{C}^3$ aus Eigenvektoren und $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ diagonalisierbar ist. Es gilt somit $Au_\ell = \mu_\ell u_\ell$ für jedes $\ell \in \{1, 2, 3\}$, woraus die Diagonalgestalt

$$\Phi_B A \Phi_B^{-1} = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+i & 0 & 0 \\ 0 & 1-i & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$$

folgt. □

Aufgabe 6. Man zeige, daß die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$$

nicht diagonalisierbar ist und berechne ihre Jordan-Normalform!

Lösung. 1. Die Auswertung der charakteristischen Gleichung $\det(A - \mu E_3) = 0$ zur Bestimmung der Nullstellen $\mu \in \mathbb{C}$ führt auf

$$0 = \begin{vmatrix} 2-\mu & 1 & 3 \\ -1 & -\mu & -2 \\ 0 & 0 & 1-\mu \end{vmatrix} = (1-\mu)(\mu^2 - 2\mu + 1) = (1-\mu)^3$$

und somit auf den algebraisch dreifachen Eigenwert $\mu = 1$.

2. Die zugehörigen Eigenvektoren $u \in \mathbb{C}^3$ von A ergeben sich aus den Lösungen des Gleichungssystems $(A - \mu E_3)u = 0$. Eine elementare Umformung der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{liefert} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad \text{Also erzeugt } u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bereits den Eigenraum $U_1(\mu) = \mathrm{lin}\{u_1\}$ zum dreifachen Eigenwert $\mu = 1$, woraus folgt, daß A *nicht* diagonalisierbar ist.

Um den linearen Teilraum $U_2(\mu) = (A - \mu E_3)^{-1}[U_1(\mu)] \supset U_1(\mu)$ von $\mathbb{C}^3$ zu bestimmen, werden die Lösungen $u \in \mathbb{C}^3$ des Gleichungssystems $(A - \mu E)u = \alpha u_1$ für beliebiges $\alpha \in \mathbb{C}$ berechnet. Durch elementare Umformungen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & \alpha \\ -1 & -1 & -2 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

erhält man den Lösungsraum $U_2(\mu) = \mathrm{lin}\{e_1, e_2\}$.

Um den linearen Teilraum $U_3(\mu) = (A - \mu E_3)^{-1}[U_2(\mu)] \supset U_2(\mu)$ von $\mathbb{C}^3$ zu berechnen, werden die Lösungen $u \in \mathbb{C}^3$ der Gleichung $(A - \mu E_3)u = \alpha e_1 + \beta e_2$ für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ bestimmt. Mit Hilfe elementarer Umformungen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & \alpha \\ -1 & -1 & -2 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & \alpha + \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -2\alpha - 3\beta \\ 0 & 0 & 1 & \alpha + \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ergibt sich der Lösungsraum $U_3(\mu) = \mathbb{C}^3$.

3. Offenbar ist $\text{lin}\{e_3\}$ ein zum linearen Teilraum $U_2(\mu) = \text{lin}\{e_1, e_2\}$ in $\mathbb{C}^3$ komplementärer linearer Teilraum. Der Vektor

$$(A - \mu E_3)e_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \in U_2(\mu)$$

erzeugt bereits einen zum Eigenraum $U_1(\mu) = \text{lin}\{u_1\}$ in $U_2(\mu) = \text{lin}\{e_1, e_2\}$ komplementären Teilraum. Auch der Vektor

$$(A - \mu E_3)^2 e_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = u_1 \in U_1(\mu)$$

spannt bereits den Eigenraum $U_1(\mu) = \text{lin}\{u_1\}$ auf.

Somit bilden die Vektoren

$$v_1 = e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = (A - \mu E_3)e_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = (A - \mu E_3)^2 e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine Basis $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ des $\mathbb{C}^3$ mit

$$Av_1 = \mu v_1 + v_2, \quad Av_2 = \mu v_2 + v_3, \quad Av_3 = \mu v_3,$$

woraus sich die Koordinatendarstellung

$$\Phi_B A \Phi_B^{-1} = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 1 & \mu & 0 \\ 0 & 1 & \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$$

als untere Dreiecksmatrix in Jordan-Normalform ergibt. $\square$

Aufgabe 7. Man zeige, daß die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \mathbb{2} & \mathbb{1} & \mathbb{0} \\ -\mathbb{1} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{1} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$$

nicht diagonalisierbar ist und berechne ihre Jordan-Normalform!

Lösung. 1. Die Auswertung der charakteristischen Gleichung $\det(A - \mu E_3) = \mathbb{0}$ zur Bestimmung der Nullstellen $\mu \in \mathbb{C}$ liefert

$$\mathbb{0} = \begin{vmatrix} \mathbb{2}-\mu & \mathbb{1} & \mathbb{0} \\ -\mathbb{1} & -\mu & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{1}-\mu \end{vmatrix} = (\mathbb{1}-\mu)(\mu^2 - \mathbb{2}\mu + \mathbb{1}) = (\mathbb{1}-\mu)^3$$

und damit den algebraisch dreifachen Eigenwert $\mu = \mathbb{1}$.

2. Die zugehörigen Eigenvektoren $u \in \mathbb{C}^3$ von A ergeben sich aus den Lösungen des Gleichungssystems $(A - \mu E_3)u = 0$. Eine elementare Umformung der Matrix

$$\begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{1} & \mathbb{0} \\ -\mathbb{1} & -\mathbb{1} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \end{pmatrix} \begin{matrix} \urcorner \\ \leftarrow\!\lrcorner + \\ \end{matrix} \quad \text{ergibt} \quad \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{1} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \end{pmatrix}.$$

Somit erzeugen bereits die beiden Eigenvektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix} \mathbb{0} \\ \mathbb{0} \\ \mathbb{1} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u_2 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} \\ \mathbb{0} \end{pmatrix}$$

den Eigenraum $U_1(\mu) = \mathrm{lin}\{u_1, u_2\}$ zum dreifachen Eigenwert $\mu = 1$, woraus folgt, daß A *nicht* diagonalisierbar ist.

Um den linearen Teilraum $U_2(\mu) = (A - \mu E_3)^{-1}[U_1(\mu)] \supset U_1(\mu)$ von $\mathbb{C}^3$ zu bestimmen, werden die Lösungen $u \in \mathbb{C}^3$ der Gleichung $(A - \mu E_3)u = \alpha u_1 + \beta u_2$ für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ berechnet. Elementare Umformungen der erweiterten Matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbb{1} & \mathbb{1} & \mathbb{0} & \beta \\ -\mathbb{1} & -\mathbb{1} & \mathbb{0} & -\beta \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \alpha \end{array}\right) \begin{matrix} \urcorner \\ \leftarrow\!\lrcorner + \\ \end{matrix} \quad \text{führen auf} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbb{1} & \mathbb{1} & \mathbb{0} & \beta \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \alpha \end{array}\right),$$

woraus sich der Lösungsraum $U_2(\mu) = \mathbb{C}^3$ ergibt, wenn die Lösbarkeitbedingung $\alpha = \mathbb{0}$ erfüllt ist.

3. Offensichtlich ist $\operatorname{lin}\{e_1\}$ ein zum Eigenraum $U_1(\mu) = \operatorname{lin}\{u_1, u_2\}$ in $\mathbb{C}^3$ komplementärer linearer Teilraum. Der Vektor

$$(A - \mu E_3)e_1 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{1} & \mathbb{0} \\ -\mathbb{1} & -\mathbb{1} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1} \\ \mathbb{0} \\ \mathbb{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} \\ \mathbb{0} \end{pmatrix} = u_2 \in U_1(\mu)$$

wird durch $u_1 \in U_1(\mu)$ zu einer Basis $\{u_1, u_2\}$ des Eigenraums $U_1(\mu) = \operatorname{lin}\{u_1, u_2\}$ ergänzt. Somit bilden die Vektoren

$$v_1 = e_1 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} \\ \mathbb{0} \\ \mathbb{0} \end{pmatrix}, \quad v_2 = (A - \mu E_3)e_1 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} \\ \mathbb{0} \end{pmatrix}, \quad v_3 = u_1 = \begin{pmatrix} \mathbb{0} \\ \mathbb{0} \\ \mathbb{1} \end{pmatrix}$$

eine Basis $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ des $\mathbb{C}^3$ mit

$$Av_1 = \mu v_1 + v_2, \quad Av_2 = \mu v_2, \quad Av_3 = \mu v_3,$$

woraus sich die Koordinatendarstellung

$$\Phi_B A \Phi_B^{-1} = \begin{pmatrix} \mu & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \mathbb{1} & \mu & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \mathbb{1} & \mathbb{1} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{1} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$$

als untere Dreiecksmatrix in Jordan-Normalform ergibt. $\square$