Übungsaufgaben 7

Skalarprodukt und Orthogonalität

Aufgabe 1. Durch die drei Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 12 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

wird ein Spat $S = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \le 1\} \subset \mathbb{R}^3$ aufgespannt. Man berechne Rauminhalt und Oberflächeninhalt! ⑥

Lösung. 1. Der Rauminhalt R des Spats S ist die Wurzel aus der Determinante von

$$G(v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} (v_1|v_1) & (v_1|v_2) & (v_1|v_3) \\ (v_2|v_1) & (v_2|v_2) & (v_2|v_3) \\ (v_3|v_1) & (v_3|v_2) & (v_3|v_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 12 & -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 12 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Da transponierte Matrizen dieselben Determinanten

$$\begin{vmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 12 & -3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 0 & 12 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 200$$

besitzen, ergibt sich der Rauminhalt $R = \sqrt{\det(G(v_1, v_2, v_3))} = 200$.

2. Der Spat $S \subset \mathbb{R}^3$ wird von sechs paarweise deckungsgleichen, in parallelen Ebenen liegenden Parallelogrammen

$$\Pi_1 = \{\alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le \alpha_2, \alpha_3 \le 1\},$$
$$\Pi_2 = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_3 v_3 \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le \alpha_1, \alpha_3 \le 1\},$$
$$\Pi_3 = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le \alpha_1, \alpha_2 \le 1\}$$

begrenzt. Der Flächeninhalt F_k jedes Parallelogramms $\Pi_k \subset \mathbb{R}^3$ wird mit Hilfe von Gram-Determinanten berechnet. Es gilt

$$F_1^2 = \det(G(v_2, v_3)) = \begin{vmatrix} (v_2|v_2) & (v_2|v_3) \\ (v_3|v_2) & (v_3|v_3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 169 \end{vmatrix} = 65^2,$$

$$F_2^2 = \det(G(v_1, v_3)) = \begin{vmatrix} (v_1|v_1) & (v_1|v_3) \\ (v_3|v_1) & (v_3|v_3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 64 & 96 \\ 96 & 169 \end{vmatrix} = 40^2,$$

$$F_3^2 = \det(G(v_1, v_2)) = \begin{vmatrix} (v_1|v_1) & (v_1|v_2) \\ (v_2|v_1) & (v_2|v_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 64 & 0 \\ 0 & 25 \end{vmatrix} = 40^2.$$

Somit folgt $F = 2F_1 + 2F_2 + 2F_3 = 290$ für den Oberflächeninhalt. □

Aufgabe 2. Seien die Verschiebungsvektoren $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^4$ sowie die Richtungsvektoren $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^4$ der beiden affinen Geraden $G_1 = \{v_1 + \lambda_1 u_1 \in \mathbb{R}^4 \mid \lambda_1 \in \mathbb{R}\}$ und $G_2 = \{v_2 + \lambda_2 u_2 \in \mathbb{R}^4 \mid \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$ durch

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Man bestimme den kürzesten Vektor $w \in \mathbb{R}^4$, der die beiden Geraden G_1 und G_2 miteinander verbindet! Welche Länge hat dieser Vektor? ⑥

Lösung. 1. Es sollen alle Vektoren $w \in \mathbb{R}^4$ ermittelt werden, welche die Geraden G_1 und G_2 miteinander verbinden und auf den Richtungsvektoren $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^4$ senkrecht stehen: Dazu wird eine Basis $\{u_3, u_4\}$ des zu $U = \text{lin}\{u_1, u_2\}$ in $\mathbb{R}^4$ orthogonalen Komplements $U^\perp$ bereitgestellt. Der Teilraum $U^\perp = \{u \in \mathbb{R}^4 \mid (u|u_1) = (u|u_2) = 0\}$ besteht aus den Lösungen $u \in \mathbb{R}^4$ des homogenen Gleichungssystems

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \cdot 3 \end{array} \quad \text{und somit} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 7 & 0 & 0 & -7 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mid :7 \;\; \cdot(-2) \\ \longleftarrow + \end{array}$$

sowie schließlich

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) . \text{ Damit bilden } \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

eine Basis $\{u_3, u_4\}$ des linearen Teilraums $U^\perp = \text{lin}\{u_3, u_4\}$.

Vektoren $w \in U^\perp$, die beide Geraden G_1 und G_2 miteinander verbinden, erfüllen $w = \lambda_3 u_3 + \lambda_4 u_4$ sowie $w = (v_2 + \lambda_2 u_2) - (v_1 + \lambda_1 u_1)$ für geeignete Koordinaten $\lambda_1, \ldots, \lambda_4 \in \mathbb{R}$. Wegen $u_3, u_4 \in U^\perp$ erhält man das inhomogene Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} \lambda_3(u_3|u_3) + \lambda_4(u_4|u_3) &=& (w|u_3) = (v_2 - v_1|u_3) \\ \lambda_3(u_3|u_4) + \lambda_4(u_4|u_4) &=& (w|u_4) = (v_2 - v_1|u_4), \end{array}$$

woraus sich $2\lambda_3 = 14$ sowie $2\lambda_4 = 2$ und somit $\lambda_3 = 7$ und $\lambda_4 = 1$ ergibt. Damit ist

$$w = \lambda_3 u_3 + \lambda_4 u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \in U^\perp$$

derjenige Vektor, der die Geraden G_1 und G_2 miteinander verbindet und auf ihren beiden Richtungsvektoren senkrecht steht. Dieser Vektor hat die Länge $\|w\| = 10$.

2. Es bleibt zu zeigen, daß $w \in U^\perp$ der kürzeste Vektor ist, der die Geraden G_1 und G_2 miteinander verbindet: Ist $u = (v_2 + \mu_2 u_2) - (v_1 + \mu_1 u_1)$ mit $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ irgendein Verbindungsvektor, so folgt aus $w = (v_2 + \lambda_2 u_2) - (v_1 + \lambda_1 u_1) \in U^\perp$ sofort

$$\begin{aligned}\|u\|^2 &= \big(w + (u-w)|w + (u-w)\big)\\ &= \big(w + (\mu_2-\lambda_2)u_2 - (\mu_1-\lambda_1)u_1|w + (\mu_2-\lambda_2)u_2 - (\mu_1-\lambda_1)u_1\big)\\ &= \|w\|^2 + \|(\mu_2-\lambda_2)u_2 - (\mu_1-\lambda_1)u_1\|^2 \geq \|w\|^2.\end{aligned}$$

Damit ist $w \in U^\perp$ der kürzeste Vektor ist, der die Geraden G_1 und G_2 miteinander verbindet. Der Vektor mit dieser Eigenschaft ist eindeutig bestimmt, denn aus der Identität $\|u\|^2 = \|w\|^2$ folgt stets $(\mu_2-\lambda_2)u_2 - (\mu_1-\lambda_1)u_1 = 0$ und damit $\mu_1 = \lambda_1$ und $\mu_2 = \lambda_2$, also $u = w$, da $\{u_1, u_2\}$ eine Basis von U ist. $\square$

Aufgabe 3. Gegeben seien die Vektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \\ 5 \\ 24 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v = \begin{pmatrix} 7 \\ 55 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

1. Man bestimme Orthonormalbasen der linearen Teilräume $U = \operatorname{lin}\{u_1, u_2\}$ sowie $U^\perp = \big\{u \in \mathbb{R}^4 \mid (u_1|u) = (u_2|u) = 0\big\}$ von $\mathbb{R}^4$!

2. Man berechne die Orthogonalprojektion und das Lot von v auf U! ⑧

Lösung. 1. Als ersten Basisvektor einer Orthonormalbasis $\{v_1, v_2\}$ von U kann man den normierten Vektor

$$v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}$$

wählen. Wegen $(u_2|v_1) = 26$ ergibt sich im nächsten Schritt

$$w_2 = u_2 - (u_2|v_1)v_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \\ 5 \\ 24 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad v_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und somit eine Orthonormalbasis $\{v_1, v_2\}$ von U.

2. Um eine Basis $\{u_3, u_4\}$ des orthogonalen Komplements $U^\perp$ von U in $\mathbb{R}^4$ zu bekommen, sucht man nach Lösungen $u \in U^\perp$ des homogenen Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 & 12 \\ 4 & 12 & -3 & 0 \end{pmatrix} u = 0,$$

das sich aus den Bedingungen $(v_1|u) = 0$ und $(v_2|u) = 0$ ergibt. Sowohl die erste Komponente $\alpha \in \mathbb{R}$ als auch die dritte Komponente $\beta \in \mathbb{R}$ der allgemeinen Lösung

$$u = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{4}\beta \\ \beta \\ -\frac{1}{4}\alpha - \frac{1}{3}\beta \end{pmatrix}$$

dieses homogenen Gleichungssystems sind frei wählbar. Für $(\alpha, \beta) = (0, 12)$ bzw. $(\alpha, \beta) = (12, 0)$ erhält man zwei linear unabhängige Basisvektoren

$$u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 12 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad u_4 = \begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{von } U^\perp.$$

3. Als ersten Basisvektor einer Orthonormalbasis $\{v_3, v_4\}$ des Teilraums $U^\perp$ kann man den normierten Vektor

$$v_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 12 \\ -4 \end{pmatrix}$$

wählen. Wegen $(u_4|v_3) = 0$ erhält man im nächsten Schritt

$$w_4 = u_4 - (u_4|v_3)v_3 = \begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad v_4 = \frac{w_4}{\|w_4\|} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

und damit eine Orthonormalbasis $\{v_3, v_4\}$ von $U^\perp$.

4. Da $\{v_1, v_2\}$ eine Orthonormalbasis von U ist, ergibt sich die Darstellung

$$P(v) = (v|v_1)v_1 + (v|v_2)v_2 = 13v_1 + 52v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 48 \\ -8 \\ 12 \end{pmatrix}$$

für die Orthogonalprojektion $P(v) \in U$ von $v \in \mathbb{R}^4$ auf U sowie

$$v - P(v) = \begin{pmatrix} 7 \\ 55 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 19 \\ 48 \\ -8 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 7 \\ 12 \\ -1 \end{pmatrix}$$

für das Lot $v - P(v) \in U^\perp$ von $v \in \mathbb{R}^4$ auf U. $\square$

Aufgabe 4. Durch die drei Vektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \ u_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ u_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

wird ein Tetraeder $\{s_1 u_1 + s_2 u_2 + s_3 u_3 \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq s_1, s_2, s_3 \leq 1, s_1 + s_2 + s_3 \leq 1\}$ aufgespannt. Man berechne die Orthogonalprojektion und das Lot von $u_3 \in \mathbb{R}^3$ auf die Grundebene $U = \operatorname{lin}\{u_1, u_2\}$! Welchen Rauminhalt hat der Tetraeder?

Lösung. 1. Die Koordinaten $x \in \mathbb{R}^2$ der Orthogonalprojektion $P(u_3) \in U$ des Spitzenvektors $u_3 \in \mathbb{R}^3$ auf U bzgl. der Basis $\{u_1, u_2\}$ sind durch $P(u_3) = x_1 u_1 + x_2 u_2$ definiert. Wegen $(u_1 | u_3 - P(u_3)) = 0$ und $(u_2 | u_3 - P(u_3)) = 0$ sind diese Koordinaten somit Lösung des inhomogenen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} (u_1|u_1) & (u_1|u_2) \\ (u_2|u_1) & (u_2|u_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (u_1|u_3) \\ (u_2|u_3) \end{pmatrix}, \quad \text{also von} \quad \begin{pmatrix} 25 & 26 \\ 26 & 40 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 30 \end{pmatrix}$$

sowie

$$\begin{pmatrix} 25 & 26 \\ 1 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{und schließlich} \quad \begin{pmatrix} 0 & -324 \\ 1 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -126 \\ 6 \end{pmatrix},$$

woraus sich $x_1 = \frac{5}{9}$ und $x_2 = \frac{7}{18}$ ergibt. Daraus ergibt sich die Orthogonalprojektion

$$P(u_3) = x_1 u_1 + x_2 u_2 = \frac{5}{9} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{7}{18} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und das Lot

$$u_3 - P(u_3) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{von } u_3 \text{ auf } U.$$

2. Der Rauminhalt R des Spats, der von den Vektoren $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}^3$ aufgespannt wird, ist die Wurzel aus der Determinante von

$$G(u_1, u_2, u_3) = \begin{pmatrix} (u_1|u_1) & (u_1|u_2) & (u_1|u_3) \\ (u_2|u_1) & (u_2|u_2) & (u_2|u_3) \\ (u_3|u_1) & (u_3|u_2) & (u_3|u_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Da transponierte Matrizen dieselben Determinaten

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -36$$

besitzen, ergibt sich $R = 36$. Der Tetraeder hat somit den Rauminhalt $\frac{1}{6} R = 6$. $\square$

Aufgabe 5. Seien die Verschiebungsvektoren $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ sowie die Richtungsvektoren $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^3$ der beiden affinen Geraden $G_1 = \{v_1 + \lambda_1 u_1 \in \mathbb{R}^3 \mid \lambda_1 \in \mathbb{R}\}$ und $G_2 = \{v_2 + \lambda_2 u_2 \in \mathbb{R}^3 \mid \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$ durch

$$v_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad u_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ -12 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

gegeben. Man bestimme den kürzesten Vektor $w \in \mathbb{R}^3$, der die beiden Geraden G_1 und G_2 miteinander verbindet! Welche Länge hat dieser Vektor?

Lösung. 1. Es sollen alle Vektoren $w \in \mathbb{R}^3$ ermittelt werden, welche die Geraden G_1 und G_2 miteinander verbinden und auf den Richtungsvektoren $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^3$ senkrecht stehen: Dazu wird eine Basis $\{u_3\}$ des zu $U = \operatorname{lin}\{u_1, u_2\}$ in $\mathbb{R}^3$ orthogonalen Komplements $U^\perp$ bereitgestellt. Der Teilraum $U^\perp = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid (u|u_1) = (u|u_2) = 0\}$ besteht aus den Lösungen $u \in \mathbb{R}^3$ des homogenen Gleichungssystems

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 10 & -12 & 1 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \cdot 4 \end{array} \quad \text{und somit} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 42 & 0 & 21 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mid :21 \ \cdot(-4) \\ \leftarrow + \end{array}$$

sowie schließlich

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right). \quad \text{Damit bildet} \quad u_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

eine Basis $\{u_3\}$ des linearen Teilraums $U^\perp = \operatorname{lin}\{u_3\}$.

Vektoren $w \in U^\perp$, die beide Geraden G_1 und G_2 verbinden, erfüllen $w = \lambda_3 u_3$ und $w = (v_2 + \lambda_2 u_2) - (v_1 + \lambda_1 u_1)$ für geeignete Koordinaten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$. Aufgrund von $u_3 \in U^\perp$ erhält man die Gleichung $\lambda_3(u_3|u_3) = (w|u_3) = (v_2 - v_1|u_3)$, woraus sich $49\lambda_3 = 49$ und somit $\lambda_3 = 1$ ergibt. Damit ist $w = \lambda_3 u_3 = u_3 \in U^\perp$ derjenige Vektor, der die Geraden G_1 und G_2 miteinander verbindet und auf ihren beiden Richtungsvektoren senkrecht steht. Dieser Vektor hat die Länge $\|w\| = 7$.

2. Ist $u = (v_2 + \mu_2 u_2) - (v_1 + \mu_1 u_1)$ mit $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ irgendein Verbindungsvektor, so folgt aus $w = (v_2 + \lambda_2 u_2) - (v_1 + \lambda_1 u_1) \in U^\perp$ sofort

$$\begin{aligned} \|u\|^2 &= \big(w + (u - w)|w + (u - w)\big) \\ &= \big(w + (\mu_2 - \lambda_2)u_2 - (\mu_1 - \lambda_1)u_1|w + (\mu_2 - \lambda_2)u_2 - (\mu_1 - \lambda_1)u_1\big) \\ &= \|w\|^2 + \|(\mu_2 - \lambda_2)u_2 - (\mu_1 - \lambda_1)u_1\|^2 \geq \|w\|^2. \end{aligned}$$

Damit ist $w \in U^\perp$ der kürzeste Vektor ist, der die Geraden G_1 und G_2 verbindet. □

Aufgabe 6. Man wende auf die Vektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

der Basis $\{u_1, u_2, u_3\}$ von $\mathbb{R}^3$ das Orthonormierungsverfahren von Schmidt an!

Lösung. 1. Der erste Vektor $u_1 \in \mathbb{R}^3$ wird normiert und man erhält

$$v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} \\ -\frac{3}{7} \\ \frac{6}{7} \end{pmatrix}.$$

2. Das Skalarprodukt $(u_2|v_1) = 2$ liefert den zu v_1 orthogonalen Vektor

$$w_2 = u_2 - (u_2|v_1)v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} \frac{2}{7} \\ -\frac{3}{7} \\ \frac{6}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{6}{7} \\ \frac{2}{7} \end{pmatrix} \quad \text{und somit} \quad v_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{6}{7} \\ \frac{2}{7} \end{pmatrix}.$$

3. Die Skalarprodukte $(u_3|v_1) = -1$ und $(u_3|v_2) = 9$ ergeben schließlich den zu v_1 und v_2 orthogonalen Vektor

$$w_3 = u_3 - (u_3|v_1)v_1 - (u_3|v_2)v_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{7} \\ -\frac{3}{7} \\ \frac{6}{7} \end{pmatrix} - 9\begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{6}{7} \\ \frac{2}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{24}{7} \\ -\frac{8}{7} \\ -\frac{12}{7} \end{pmatrix}$$

und somit

$$v_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|} = \begin{pmatrix} \frac{6}{7} \\ -\frac{2}{7} \\ -\frac{3}{7} \end{pmatrix},$$

woraus sich die Orthonormalbasis $\{v_1, v_2, v_3\}$ von $\mathbb{R}^3$ ergibt. $\square$

Übungsaufgaben 7*

Symmetrische und orthogonale Operatoren

Zusatzaufgabe 1. Seien V ein n-dimensionaler euklidischer Raum mit dem Skalarprodukt $(\ |\ ) : V \times V \to \mathbb{R}$ sowie $T \in L(V;V)$ ein symmetrischer Operator mit den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, wobei $\lambda_* \in \mathbb{R}$ der kleinste und $\lambda^* \in \mathbb{R}$ der größte Eigenwert von T sein soll.

1. Man zeige, daß die Beziehung $\lambda_*(u|u) \leq (T(u)|u) \leq \lambda^*(u|u)$ für alle $u \in V$ gilt!

2. Man weise nach, daß im Falle $\lambda_* > 0$ durch $(u|v)_\circ = (T(u)|v)$ für $u, v \in V$ ein weiteres Skalarprodukt $(\ |\ )_\circ : V \times V \to \mathbb{R}$ in V definiert wird! ⑥

Lösung. 1. Da $T \in L(V;V)$ ein symmetrischer Operator ist, gibt es eine Orthonormalbasis $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ von V aus Eigenvektoren $v_k \in U_1(\lambda_k)$ für $k \in \{1, \ldots, n\}$ zu den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ von T.

Stellt man einen beliebigen Vektor $u = \sum_{\ell=1}^n x_\ell v_\ell \in V$ mit Hilfe seiner Koordinaten $x = \Phi_B(u) \in \mathbb{R}^n$ bzgl. der Orthonormalbasis B von V dar, so ergibt sich wegen $T(v_k) = \lambda_k v_k$ die Beziehung

$$(T(u)|u) = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n x_k x_\ell\, (T(v_k)|v_\ell) = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n x_k x_\ell\, \lambda_k (v_k|v_\ell) = \sum_{k=1}^n \lambda_k |x_k|^2$$

und somit wegen $\lambda_* \leq \lambda_k \leq \lambda^*$ und $x_k = (u|v_k)$ für alle $k \in \{1, \ldots, n\}$ schließlich

$$\lambda_*(u|u) = \sum_{k=1}^n \lambda_* |x_k|^2 \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k |x_k|^2 \leq \sum_{k=1}^n \lambda^* |x_k|^2 = \lambda^*(u|u).$$

2. Wegen der Symmetrie von $T \in L(V;V)$ erhält man zunächst

$$(u|v)_\circ = (T(u)|v) = (u|T(v)) = (T(v)|u) = (v|u)_\circ$$

sowie desweiteren

$$(u|\lambda v + \mu w)_\circ = (Tu|\lambda v + \mu w) = \lambda(Tu|v) + \mu(Tu|w) = \lambda(u|v)_\circ + \mu(u|w)_\circ$$

für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $u, v, w \in V$. Im Falle $\lambda_* > 0$ gilt nach Schritt 1

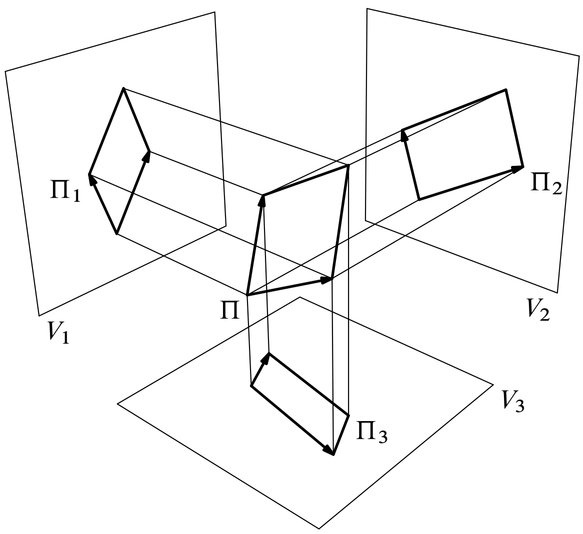
$$(u|u)_\circ = (T(u)|u) \geq \lambda_*(u|u) \geq 0 \quad \text{für alle } u \in V.$$

Gilt $(u|u)_\circ = 0$ für ein $u \in V$, so folgt daraus $(u|u) = 0$ und somit $u = 0$. □

Zusatzaufgabe 2. Gegeben seien die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u_1 = \begin{pmatrix} -15 \\ -6 \\ 42 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 15 \\ 22 \\ 46 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

sowie die linearen Teilräume $V_k = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid (v_k|u) = 0\}$ von $\mathbb{R}^3$ und die Orthogonalprojektoren $P_k \in L(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$ von $\mathbb{R}^3$ auf V_k für $k \in \{1,2,3\}$. Ferner werden das von u_1, u_2 aufgespannte Parallelogramm $\Pi = \{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq \alpha_1, \alpha_2 \leq 1\}$ sowie die Projektionen $\Pi_k = \{\alpha_1 P_k(u_1) + \alpha_2 P_k(u_2) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq \alpha_1, \alpha_2 \leq 1\}$ auf V_k für $k \in \{1,2,3\}$ betrachtet. Man zeige, daß für die Flächeninhalte F, F_1, F_2, F_3 der Parallelogramme Π, Π_1, Π_2, $\Pi_3 \subset \mathbb{R}^3$ die Beziehung $F^2 = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2$ gilt! ⑧



Lösung. 1. Die Vektoren v_1, v_2, $v_3 \in \mathbb{R}^3$ stehen jeweils paarweise senkrecht aufeinander, sie bilden also eine Orthogonalbasis. Daraus folgt für die linearen Teilräume

$$\begin{aligned} V_1 &= \{u \in \mathbb{R}^3 \mid (v_1|u) = 0\} = \operatorname{lin}\{v_2, v_3\}, \\ V_2 &= \{u \in \mathbb{R}^3 \mid (v_2|u) = 0\} = \operatorname{lin}\{v_1, v_3\}, \\ V_3 &= \{u \in \mathbb{R}^3 \mid (v_3|u) = 0\} = \operatorname{lin}\{v_1, v_2\}. \end{aligned}$$

2. Für die Koordinaten α_1, α_2, $\alpha_3 \in \mathbb{R}$ und β_1, β_2, $\beta_3 \in \mathbb{R}$ der beiden Vektoren $u_1 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$ und $u_2 = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3 \in \mathbb{R}^3$ bzgl. der Orthogonalbasis $\{v_1, v_2, v_3\}$ gilt $(u_1|v_k) = \alpha_k \|v_k\|^2$ sowie $(u_2|v_k) = \beta_k \|v_k\|^2$ für $k \in \{1,2,3\}$, also

$$\alpha_1 = \frac{(u_1|v_1)}{\|v_1\|^2} = -3, \quad \alpha_2 = \frac{(u_1|v_2)}{\|v_2\|^2} = 6, \quad \alpha_3 = \frac{(u_1|v_3)}{\|v_3\|^2} = 6,$$

$$\beta_1 = \frac{(u_2|v_1)}{\|v_1\|^2} = 3, \quad \beta_2 = \frac{(u_2|v_2)}{\|v_2\|^2} = 10, \quad \beta_3 = \frac{(u_2|v_3)}{\|v_3\|^2} = 2.$$

Man erhält bezüglich der Basis $\{v_1, v_2, v_3\}$ für $u_1,\ u_2 \in \mathbb{R}^3$ die Darstellungen als Linearkombinationen $u_1 = -3v_1 + 6v_2 + 6v_3$ und $u_2 = 3v_1 + 10v_2 + 2v_3$.

Für die Projektionen $P_k(u_1),\ P_k(u_2) \in V_k$ folgen hieraus die Darstellungen

$$P_1(u_1) = 6v_2 + 6v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 42 \end{pmatrix}, \qquad P_1(u_2) = 10v_2 + 2v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 22 \\ 46 \end{pmatrix},$$

$$P_2(u_1) = -3v_1 + 6v_3 = \begin{pmatrix} -15 \\ -24 \\ 18 \end{pmatrix}, \quad P_2(u_2) = 3v_1 + 2v_3 = \begin{pmatrix} 15 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix},$$

$$P_3(u_1) = -3v_1 + 6v_2 = \begin{pmatrix} -15 \\ 18 \\ 24 \end{pmatrix}, \quad P_3(u_2) = 3v_1 + 10v_2 = \begin{pmatrix} 15 \\ 30 \\ 40 \end{pmatrix}.$$

3. Für die Berechnung der Flächeninhalte $F_1,\ F_2,\ F_3,\ F$ der vier Parallelogramme $\Pi_1,\ \Pi_2,\ \Pi_3,\ \Pi \subset \mathbb{R}^3$ werden Gram-Determinanten benutzt. Es gilt

$$F^2 = \begin{vmatrix} (u_1|u_1) & (u_1|u_2) \\ (u_2|u_1) & (u_2|u_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2025 & 1575 \\ 1575 & 2825 \end{vmatrix} = 1800^2$$

sowie

$$F_1^2 = \begin{vmatrix} (P_1(u_1)|P_1(u_1)) & (P_1(u_1)|P_1(u_2)) \\ (P_1(u_2)|P_1(u_1)) & (P_1(u_2)|P_1(u_2)) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1800 & 1800 \\ 1800 & 2600 \end{vmatrix} = 1200^2,$$

$$F_2^2 = \begin{vmatrix} (P_2(u_1)|P_2(u_1)) & (P_2(u_1)|P_2(u_2)) \\ (P_2(u_2)|P_2(u_1)) & (P_2(u_2)|P_2(u_2)) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1125 & 75 \\ 75 & 325 \end{vmatrix} = 600^2,$$

$$F_3^2 = \begin{vmatrix} (P_3(u_1)|P_3(u_1)) & (P_3(u_1)|P_3(u_2)) \\ (P_3(u_2)|P_3(u_1)) & (P_3(u_2)|P_3(u_2)) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1125 & 1275 \\ 1275 & 2725 \end{vmatrix} = 1200^2.$$

Daraus folgt tatsächlich die Beziehung $F^2 = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2$. $\square$

Zusatzaufgabe 3. Sei die orthogonale symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{6}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{6}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{6}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \quad \text{gegeben.}$$

Man bestimme eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A! 6

Lösung. 1. Die Auswertung der charakteristischen Gleichung $\det(A - \lambda E_3) = \mathbb{0}$ zur Findung der reellen Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{R}$ liefert

$$0 = \begin{vmatrix} \frac{6}{7} - \lambda & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} - \lambda & -\frac{6}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{6}{7} & \frac{3}{7} - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{6}{7} - \lambda & 3 - 3\lambda & 2 - 2\lambda \\ \frac{3}{7} & 1 - \lambda & 0 \\ \frac{2}{7} & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 - \lambda & 0 & 0 \\ \frac{3}{7} & 1 - \lambda & 0 \\ \frac{2}{7} & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix}$$

und somit $(1 + \lambda)(1 - \lambda)^2 = 0$. Somit besitzt die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ die Eigenwerte $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

2. Um die zugehörigen Eigenvektoren $v_\ell \in \mathbb{R}^3$ für $\ell \in \{1, 2, 3\}$ zu bestimmen, werden die Lösungen des Gleichungssystems $(A - \lambda_\ell E_3)v_\ell = 0$ berechnet:

Im Falle $\lambda_1 = -1$ führen elementare Umformungen der Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{13}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{5}{7} & -\frac{6}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{6}{7} & \frac{10}{7} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot 3 \quad \cdot(-5) \\ + \\ + \end{array} \quad \text{auf} \quad \begin{pmatrix} \frac{13}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ 6 & 2 & 0 \\ -9 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \mid \cdot 7 \\ \mid : 2 \\ \mid : 3 \quad + \end{array}$$

und somit zu

$$\begin{pmatrix} 13 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} + \\ \cdot(-3) \\ \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{also } v_1 = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Daher ist $U_1(\lambda_1) = \operatorname{lin}\{v_1\}$ der Eigenraum zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$.

Für $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ führen elementare Umformungen der Matrix

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{9}{7} & -\frac{6}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{6}{7} & -\frac{4}{7} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot 3 \quad \cdot 2 \\ + \\ + \end{array} \quad \text{auf} \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und somit zu orthogonalen Eigenvektoren

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_3 = \frac{1}{\sqrt{70}} \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Damit ist $U_1(\lambda_2) = \operatorname{lin}\{v_2, v_3\}$ der Eigenraum zum Eigenwert $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ und $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ eine Orthonormalbasis in $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A. □

Zusatzaufgabe 4. Man weise nach, daß die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}\sqrt{3} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\sqrt{3} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

orthogonal ist sowie $\det(A) = 1$ gilt und finde geeignete Winkel $\varphi, \psi, \theta \in [0, 2\pi[$ für eine Zerlegung von $A = A_1 A_2 A_3 \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ in ein Produkt von Drehmatrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} \cos\psi & 0 & -\sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\psi & 0 & \cos\psi \end{pmatrix}, \; A_3 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}!$$

Lösung. 1. Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ist orthogonal, denn es gilt

$$A^{\mathsf{T}} A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}\sqrt{3} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}\sqrt{3} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\sqrt{3} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bei der Berechung der Determinante

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{4}\sqrt{3} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\sqrt{3} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{4}\sqrt{3} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} -\frac{1}{4}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{vmatrix} = 1$$

wurde zuerst das $\sqrt{3}$-fache der ersten Spalte zur zweiten Spalte addiert und dann nach der zweiten Spalte entwickelt.

2. Gefunden werden sollen drei Winkel $\varphi, \psi, \theta \in [0, 2\pi[$, so daß das Produkt $A_1 A_2 A_3 \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ der drei Drehmatrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} \cos\psi & 0 & -\sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\psi & 0 & \cos\psi \end{pmatrix}, \; A_3 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit der vorgegebenen Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ übereinstimmt. Dazu wird die Matrix A Schritt für Schritt mit den inversen Drehmatrizen

$$A_3^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; A_2^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} \cos\psi & 0 & \sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\psi & 0 & \cos\psi \end{pmatrix}, \; A_1^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

multipliziert, um sukzessive die unbekannten Winkel zu bestimmen.

Im ersten Schritt berechnet man das Produkt

$$AA_3^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}\sqrt{3}\cos\theta - \frac{3}{4}\sin\theta & -\frac{1}{4}\sqrt{3}\sin\theta + \frac{3}{4}\cos\theta & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4}\cos\theta - \frac{1}{4}\sqrt{3}\sin\theta & -\frac{1}{4}\sin\theta + \frac{1}{4}\sqrt{3}\cos\theta & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3}\cos\theta - \frac{1}{2}\sin\theta & \frac{1}{2}\sqrt{3}\sin\theta + \frac{1}{2}\cos\theta & 0 \end{pmatrix}$$

und bestimmt den Winkel $\theta \in [0, 2\pi[$ derart, daß die Einträge in der ersten Zeile die Bedingungen

$$-\tfrac{1}{4}\sqrt{3}\cos\theta - \tfrac{3}{4}\sin\theta \geq 0 \quad \text{und} \quad -\tfrac{1}{4}\sqrt{3}\sin\theta + \tfrac{3}{4}\cos\theta = 0$$

erfüllen. Dies ist gerade für $\theta = \frac{4}{3}\pi$, also $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ und $\sin\theta = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ der Fall, woraus

$$AA_3^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{folgt.}$$

Im zweiten Schritt wird das Produkt

$$AA_3^\mathsf{T}A_2^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3}\cos\psi + \frac{1}{2}\sin\psi & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3}\sin\psi - \frac{1}{2}\cos\psi \\ \frac{1}{2}\cos\psi - \frac{1}{2}\sqrt{3}\sin\psi & 0 & \frac{1}{2}\sin\psi + \frac{1}{2}\sqrt{3}\cos\psi \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

berechnet und der Winkel $\psi \in [0, 2\pi[$ so bestimmt, daß die Einträge in der ersten Zeile den Bedingungen

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\cos\psi + \tfrac{1}{2}\sin\psi \geq 0 \quad \text{und} \quad \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\sin\psi - \tfrac{1}{2}\cos\psi = 0$$

genügen. Daraus ergibt sich $\psi = \frac{1}{6}\pi$, also $\cos\psi = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ und $\sin\psi = \frac{1}{2}$, woraus

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = A_1 = AA_3^\mathsf{T}A_2^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{folgt.}$$

Der Winkel $\varphi = \frac{3}{2}\pi \in [0, 2\pi[$ erfüllt die Bedingungen $\cos\varphi = 0$ und $\sin\varphi = -1$. Somit läßt sich $A = A_1A_2A_3 \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ als Produkt der drei Drehmatrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

schreiben. □

Zusatzaufgabe 5. Man zeige, daß die beiden symmetrischen Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ -4 & 7 & 4 \\ 8 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

die Beziehung $A_1A_2 = A_2A_1$ erfüllen und finde eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ aus Vektoren $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$, die sowohl Eigenvektoren von A_1 als auch von A_2 sind!

Lösung. 1. Die Matrizen A_1 und A_2 sind *vertauschbar,* denn wegen

$$A_1A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ -4 & 7 & 4 \\ 8 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 & -18 & 36 \\ -18 & 72 & 18 \\ 36 & 18 & 45 \end{pmatrix}$$

sowie

$$A_2A_1 = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ -4 & 7 & 4 \\ 8 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 & -18 & 36 \\ -18 & 72 & 18 \\ 36 & 18 & 45 \end{pmatrix}$$

gilt $A_1A_2 = A_2A_1$.

2.1. Die Auswertung der charakteristischen Gleichung $\det(A_1 - \lambda E_3) = 0$ zur Findung der Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{R}$ liefert

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 & 8 \\ -4 & 7-\lambda & 4 \\ 8 & 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9-\lambda & -18+2\lambda & 0 \\ -4 & 7-\lambda & 4 \\ 9-\lambda & 0 & 9-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 9-\lambda & 0 & 0 \\ -4 & -9-\lambda & 4 \\ 9-\lambda & 0 & 9-\lambda \end{vmatrix} = (-9-\lambda)\begin{vmatrix} 9-\lambda & 0 \\ 9-\lambda & 9-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+9)(\lambda-9)^2.$$

Somit besitzt die Matrix A_1 die Eigenwerte $\lambda_1 = -9$ und $\lambda_2 = \lambda_3 = 9$.

2.2. Für $\ell \in \{1,2\}$ wird jeweils der Eigenraum $U_1(\lambda_\ell)$ von A_1 zum Eigenwert λ_ℓ durch Lösung des homogenen Gleichungssystems $(A_1 - \lambda_\ell E_3)u = 0$ bestimmt:

Im Falle $\lambda_1 = -9$ führen elementare Umformungen der Matrix

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 & 8 \\ -4 & 16 & 4 \\ 8 & 4 & 10 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot 4 \\ + \\ + \end{array} \quad \text{auf} \quad \begin{pmatrix} 10 & -4 & 8 \\ 36 & 0 & 36 \\ 18 & 0 & 18 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \mid\, :2 \\ \mid\, :36 \\ \mid\, :18 \end{array}$$

und somit zu

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} + \\ \cdot(-1) \quad \cdot(-4) \\ + \end{array} \quad \text{sowie} \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Daher ist $U_1(\lambda_1) = \mathrm{lin}\{u_1\}$ der Eigenraum von A_1 zum Eigenwert $\lambda_1 = -9$.

Für $\lambda_2 = \lambda_3 = 9$ liefern elementare Umformungen der Matrix

$$\begin{pmatrix} -8 & -4 & 8 \\ -4 & -2 & 4 \\ 8 & 4 & -8 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \mid :4 \\ \mid :2 \\ \mid :4 \end{array} \qquad \text{offenbar} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

also den Eigenraum $U_1(\lambda_2) = U_1(\lambda_1)^{\perp}$ von A_1 zu $\lambda_2 = \lambda_3 = 9$.

3.1. Die Auswertung der charakteristischen Gleichung $\det(A_2 - \mu E_3) = 0$ zur Findung der Eigenwerte $\mu \in \mathbb{R}$ führt auf

$$0 = \begin{vmatrix} 5-\mu & -2 & 4 \\ -2 & 8-\mu & 2 \\ 4 & 2 & 5-\mu \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9-\mu & -18+2\mu & 0 \\ -2 & 8-\mu & 2 \\ 9-\mu & 0 & 9-\mu \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 9-\mu & 0 & 0 \\ -2 & -\mu & 2 \\ 9-\mu & 0 & 9-\mu \end{vmatrix} = -\mu \begin{vmatrix} 9-\mu & 0 \\ 9-\mu & 9-\mu \end{vmatrix} = -\mu(\mu-9)^2.$$

Daher hat die Matrix A_2 die Eigenwerte $\mu_1 = 0$ und $\mu_2 = \mu_3 = 9$.

3.2. Für $\ell \in \{1,2\}$ wird jeweils der Eigenraum $U_1(\mu_\ell)$ von A_2 zum Eigenwert μ_ℓ durch Lösung des homogenen Gleichungssystems $(A_2 - \mu_\ell E_3)v = 0$ bestimmt:

Im Falle $\mu_1 = 0$ führen elementare Umformungen der Matrix

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot 4 \\ + \\ + \end{array} \qquad \text{auf} \qquad \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 18 & 0 & 18 \\ 9 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \mid :18 \\ \mid :9 \end{array}$$

und somit zu

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} + \\ \cdot(-1) \quad \cdot(-4) \\ + \end{array} \qquad \text{sowie} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Daher ist $U_1(\mu_1) = \operatorname{lin}\{v_1\}$ der Eigenraum von A_2 zum Eigenwert $\mu_1 = 0$.

Für $\mu_2 = \mu_3 = 9$ liefern elementare Umformungen der Matrix

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 & 4 \\ -2 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \mid :2 \\ \\ \mid :2 \end{array} \qquad \text{offenbar} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

also den Eigenraum $U_1(\mu_2) = U_1(\mu_1)^{\perp}$ von A_2 zu $\mu_2 = \mu_3 = 9$.

4. Somit ist nachgewiesen, daß die vertauschbaren Matrizen A_1 und A_2 dieselben Eigenräume $U_1(\lambda_k) = U_1(\mu_k)$ für $k \in \{1, 2\}$ besitzen. Die orthogonalen Vektoren

$$u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in U_1(\lambda_2)$$

ergänzen $u_1 \in U_1(\lambda_1)$ zu einer Basis des $\mathbb{R}^3$. Schließlich erhält man durch Normierung eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ aus Vektoren

$$\frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \frac{u_3}{\|u_3\|} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

die sowohl Eigenvektoren von A_1 als auch von A_2 sind. $\square$