Übungsaufgaben 8

Differenzierbare Abbildungen

Aufgabe 1. Seien ein endlichdimensionaler euklidischer Raum V und ein symmetrischer Operator $T \in L(V;V)$ mit den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ vorgegeben, wobei $\lambda_* \in \mathbb{R}$ der kleinste und $\lambda^* \in \mathbb{R}$ der größte Eigenwert von T sein sollen. Desweiteren werde eine Abbildung $f : V \to \mathbb{R}$ durch $f(u) = (T(u)|u)$ für $u \in V$ definiert.

1. Man berechne die Extremwerte $\inf_{u\in K} f(u)$ sowie $\sup_{u\in K} f(u)$ von $f : V \to \mathbb{R}$ auf der abgeschlossenen Einheitskugel $K = \{u \in V \mid \|u\| \le 1\}$ und gebe Extremstellen $v_* \in K$ sowie $v^* \in K$ an, in denen das Minimum $f(v_*) = \min_{u\in K} f(u)$ bzw. Maximum $f(v^*) = \max_{u\in K} f(u)$ angenommen wird!

2. Man zeige, daß $f : V \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Abbildung ist und bestimme ihre Ableitung $Df(u) \in L(V;\mathbb{R})$ in jedem $u \in V$! ⑥

Lösung. 1. Da $T \in L(V;V)$ ein symmetrischer Operator mit dem kleinsten Eigenwert $\lambda_* \in \mathbb{R}$ und dem größten Eigenwert $\lambda^* \in \mathbb{R}$ ist, gilt $\lambda_*(u|u) \le (T(u)|u) \le \lambda^*(u|u)$ für alle $u \in V$. Daraus ergibt sich zunächst die Abschätzung

$$\lambda_* \le \inf_{u\in K} f(u) \le \sup_{u\in K} f(u) \le \lambda^*$$

für die Extremwerte von $f : V \to \mathbb{R}$ auf K. Da eine Orthonormalbasis von V aus Eigenvektoren $v_1 \in U_1(\lambda_1), \ldots, v_n \in U_1(\lambda_n)$ zu den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ des symmetrischen Operators $T \in L(V;V)$ existiert, kann man aus dieser Orthonormalbasis zwei Vektoren $v_* \in K$ und $v^* \in K$ mit $T(v_*) = \lambda_* v_*$ sowie $T(v^*) = \lambda^* v^*$ auswählen. Daraus folgt

$$f(v_*) = (T(v_*)|v_*) = \lambda_* \quad \text{sowie} \quad f(v^*) = (T(v^*)|v^*) = \lambda^*$$

und somit $f(v_*) = \min_{u\in K} f(u)$ sowie $f(v^*) = \max_{u\in K} f(u)$.

2. Es soll für jedes $u \in V$ die Richtungsableitung $\langle Df(u), v\rangle \in \mathbb{R}$ in beliebiger Richtung $v \in V$ bestimmt werden: Für alle $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta \neq 0$ gilt

$$\begin{aligned}\frac{f(u+\delta v) - f(u)}{\delta} &= \frac{(T(u+\delta v)|u+\delta v) - (T(u)|u)}{\delta} \\ &= (T(v)|u) + (T(u)|v) + \delta(T(v)|v).\end{aligned}$$

Für $\delta \to 0$ ergibt sich daraus die Existenz des Grenzwerts

$$\langle Df(u), v\rangle = \lim_{\delta\to 0} \frac{f(u+\delta v) - f(u)}{\delta} = (T(v)|u) + (T(u)|v) = 2(T(u)|v)$$

für alle $u, v \in V$ wegen der Symmetrie von $T \in L(V;V)$. □

Aufgabe 2. Betrachtet werde die Hohlkugel $X = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{1}{2} < \|x\| < 2\right\}$ sowie die durch $f(x) = \frac{x}{\|x\|^2}$ für $x \in X$ definierte Kelvin-Transformation $f : X \to \mathbb{R}^3$.

1. Man zeige, daß f eine bijektive Abbildung von X auf X ist und gebe ihre inverse Abbildung $f^{-1} : X \to \mathbb{R}^3$ an!

2. Man berechne für jedes $x \in X$ die Ableitung $Df(x) \in L(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ sowie deren Eigenwerte und begründe, warum diese Funktionalmatrix diagonalisierbar ist! ⑧

Lösung. 1. Zunächst liegt das Bild $f[X] \subset \mathbb{R}^3$ tatsächlich in X, denn man erhält

$$\frac{1}{2} < \|f(x)\| = \frac{1}{\|x\|} < 2, \quad \text{falls } \frac{1}{2} < \|x\| < 2 \text{ für } x \in \mathbb{R}^3 \text{ gilt.}$$

Ist andererseits $y \in X$ beliebig vorgegeben, dann erfüllt $x = f(y) \in X$ die Beziehung

$$f(x) = \frac{f(y)}{\|f(y)\|^2} = \|y\|^2 \frac{y}{\|y\|^2} = y \in X,$$

das heißt, f bildet die Menge X auf sich selbst ab, und es gilt außerdem $f(f(y)) = y$ für jedes $y \in X$. Erfüllen also $x, \xi \in X$ die Beziehung $f(x) = f(\xi) \in X$, so erhält man $f(f(x)) = x$ sowie $f(f(\xi)) = \xi$, also $x = \xi \in X$. Damit ist $f : X \to \mathbb{R}^3$ bijektiv und eine Inversion, denn es gilt $f^{-1}(x) = f(x)$ für alle $x \in X$.

2. Die Ableitung $Df(x) \in L(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ in $x \in X$ ist die Funktionalmatrix

$$Df(x) = \frac{1}{\|x\|^4} \begin{pmatrix} \|x\|^2 - 2x_1^2 & -2x_1x_2 & -2x_1x_3 \\ -2x_2x_1 & \|x\|^2 - 2x_2^2 & -2x_2x_3 \\ -2x_3x_1 & -2x_3x_2 & \|x\|^2 - 2x_3^2 \end{pmatrix},$$

welche wegen ihrer Symmetrie diagonalisierbar ist. Damit hat $Df(x) \in L(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ für jedes $x \in X$ drei Eigenwerte $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \lambda_3(x) \in \mathbb{R}$, und es existiert ein Orthonormalsystem $\{v_1(x), v_2(x), v_3(x)\}$ des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren $v_\ell(x) \in \mathbb{R}^3$ zum Eigenwert $\lambda_\ell(x) \in \mathbb{R}$ für $\ell \in \{1, 2, 3\}$.

Für die Berechnung der Eigenwerte $\lambda(x) \in \mathbb{R}$ für $x \in X$ wird die Gleichung $\det(Df(x) - \lambda(x)E_3) = 0$ gelöst, die zu $\det\left(\|x\|^4 Df(x) - \|x\|^4 \lambda(x) E_3\right) = 0$ äquivalent ist. Ohne eine komplizierte Rechung kann man bereits erkennen, daß im Falle $\|x\|^2 = \|x\|^4 \lambda(x)$ die Determinante

$$\begin{vmatrix} \|x\|^2 - 2x_1^2 - \|x\|^4\lambda(x) & -2x_1x_2 & -2x_1x_3 \\ -2x_2x_1 & \|x\|^2 - 2x_2^2 - \|x\|^4\lambda(x) & -2x_2x_3 \\ -2x_3x_1 & -2x_3x_2 & \|x\|^2 - 2x_3^2 - \|x\|^4\lambda(x) \end{vmatrix}$$

verschwindet, denn dann ergibt sich durch Ausklammern gemeinsamer Faktoren

$$\begin{vmatrix} -2x_1^2 & -2x_1x_2 & -2x_1x_3 \\ -2x_2x_1 & -2x_2^2 & -2x_2x_3 \\ -2x_3x_1 & -2x_3x_2 & -2x_3^2 \end{vmatrix} = -8x_1x_2x_3 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Damit ist $\lambda_1(x) = \lambda_2(x) = \frac{1}{\|x\|^2} \in \mathbb{R}$ doppelter Eigenwert von $Df(x) \in L(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$, denn das homogene Gleichungssystem zur Bestimmung der zugehörigen Eigenvektoren führt auf das Koeffizientenschema

$$\begin{pmatrix} -2x_1^2 & -2x_1x_2 & -2x_1x_3 \\ -2x_2x_1 & -2x_2^2 & -2x_2x_3 \\ -2x_3x_1 & -2x_3x_2 & -2x_3^2 \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit können für jedes $x \in X$ zwei orthonormale Eigenvektoren $v_1(x), v_2(x) \in X$ zum Eigenwert $\lambda_1(x) = \lambda_2(x) = \frac{1}{\|x\|^2}$ gewählt werden, die auf $x \in X$ und somit dem Vektor $v_3(x) = \frac{x}{\|x\|} \in \mathbb{R}^3$ senkrecht stehen. Dies bedeutet aber, daß $v_3(x) \in \mathbb{R}^3$ selbst ein Eigenvektor zum noch unbestimmten Eigenwert $\lambda_3(x) \in \mathbb{R}$ sein muß: Es gilt

$$Df(x)v_3(x) = \frac{1}{\|x\|^5} \begin{pmatrix} \|x\|^2 - 2x_1^2 & -2x_1x_2 & -2x_1x_3 \\ -2x_2x_1 & \|x\|^2 - 2x_2^2 & -2x_2x_3 \\ -2x_3x_1 & -2x_3x_2 & \|x\|^2 - 2x_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\frac{v_3(x)}{\|x\|^2},$$

woraus sich der dritte Eigenwert $\lambda_3(x) = -\frac{1}{\|x\|^2} \in \mathbb{R}$ ergibt. $\square$

Aufgabe 3. Seien auf dem offenen Kreis $X = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < 4\}$ die beiden Funktionen $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$ vorgegeben durch

$$f_1(x) = \sqrt{12 - 3x_1^2 - 3x_2^2} \quad \text{und} \quad f_2(x) = \sqrt{4 + x_1^2 + x_2^2} \quad \text{für } x \in X.$$

1. Man bestimme die Teilmenge $S = \{x \in X \mid f_1(x) = f_2(x)\}$ aller Punkte von X, in denen die Funktionen f_1 und f_2 dieselben Werte annehmen!

2. Man zeige, daß sich die Graphen der Funktionen f_1 und f_2 senkrecht schneiden, indem man beweist, daß sich die Graphen der Linearisierungen von f_1 und f_2 in jedem Punkt $x \in S$ als affine Hyperebenen des $\mathbb{R}^3$ senkrecht schneiden! ⑥

Lösung. 1. Da $12 - 3x_1^2 - 3x_2^2 \geq 0$ und $4 + x_1^2 + x_2^2 \geq 0$ für alle $x \in X$ gilt, besteht die Teilmenge $S = \{x \in X \mid f_1(x) = f_2(x)\}$ aus allen Punkten $x \in X$, für die

$$12 - 3x_1^2 - 3x_2^2 = |f_1(x)|^2 = |f_2(x)|^2 = 4 + x_1^2 + x_2^2 \ \text{ und somit } \ x_1^2 + x_2^2 = 2$$

gilt. Damit ist $S = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 2\}$ eine Kreislinie in X.

2. Für jedes $k \in \{1, 2\}$ ist der Graph der durch

$$h_k(\xi_1, \xi_2) = f_k(x) + Df_k(x)(\xi_1 - x_1, \xi_2 - x_2) \quad \text{für } (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$$

definierten Linearisierung $h_k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ von f_k in $x \in S$ jeweils die affine Hyperebene

$$M_k = \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3 \mid h_k(\xi_1, \xi_2) = \xi_3\}$$

von $\mathbb{R}^3$, und die jeweils dazu parallele lineare Hyperebene besitzt die Darstellung

$$V_k = \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3 \mid Df_k(x)(\xi_1, \xi_2) - \xi_3 = 0\}.$$

Aufgrund der Gestalt

$$Df_1(x) = \frac{-3x}{\sqrt{12 - 3x_1^2 - 3x_2^2}} = \frac{-3x}{\sqrt{6}} \quad \text{und} \quad Df_2(x) = \frac{x}{\sqrt{4 + x_1^2 + x_2^2}} = \frac{x}{\sqrt{6}}$$

der Ableitungen in den Punkten $x \in S$ folgen daraus die Darstellungen

$$\begin{aligned} V_1 &= \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3 \mid -3x_1\xi_1 - 3x_2\xi_2 - \sqrt{6}\,\xi_3 = 0\}, \\ V_2 &= \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1\xi_1 + x_2\xi_2 - \sqrt{6}\,\xi_3 = 0\}. \end{aligned}$$

3. Da die orthogonalen Komplemente $V_1^\perp$ und $V_2^\perp$ von V_1 bzw. V_2 somit von

$$\begin{pmatrix} -3x_1 \\ -3x_2 \\ -\sqrt{6} \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

aufgespannt werden, welche für $x \in S$ orthogonal zueinander sind, müssen sich die Hyperebenen V_1 und V_2 und damit auch M_1 und M_2 senkrecht schneiden. □

Aufgabe 4. Auf der Menge $X = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ sei das durch eine im Nullpunkt befindliche Punktladung hervorgerufene elektrostatische Potential $\varphi : X \to \mathbb{R}$ mittels

$$\varphi(x) = \frac{1}{\|x\|} \quad \text{für } x \in X \text{ gegeben.}$$

Man berechne das durch $E(x) = -\operatorname{grad}\varphi(x) = -D\varphi(x) \in \mathbb{R}^3$ für $x \in X$ definierte elektrische Feld $E : X \to \mathbb{R}^3$ und zeige seine Divergenzfreiheit

$$\operatorname{div} E(x) = \sum_{k=1}^{3} D_k E_k(x) = 0 \quad \text{für } x \in X$$

sowie seine Wirbelfreiheit

$$\operatorname{rot} E(x) = \begin{pmatrix} D_2 E_3(x) - D_3 E_2(x) \\ D_3 E_1(x) - D_1 E_3(x) \\ D_1 E_2(x) - D_2 E_1(x) \end{pmatrix} = 0 \quad \text{für } x \in X!$$

Lösung. Die Ableitung des Potentials $\varphi : X \to \mathbb{R}$ ist dessen Gradient

$$\operatorname{grad}\varphi(x) = D\varphi(x) = -\frac{x}{\|x\|^3} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{für } x \in X,$$

woraus sich das elektrische Feld $E : X \to \mathbb{R}^3$ vermöge

$$E(x) = -\operatorname{grad}\varphi(x) = \frac{x}{\|x\|^3} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{für } x \in X$$

ergibt. Dessen Ableitung $DE(x) \in L(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$ in $x \in X$ ist die Funktionalmatrix

$$DE(x) = \frac{1}{\|x\|^5} \begin{pmatrix} \|x\|^2 - 3x_1^2 & -3x_1x_2 & -3x_1x_3 \\ -3x_2x_1 & \|x\|^2 - 3x_2^2 & -3x_2x_3 \\ -3x_3x_1 & -3x_3x_2 & \|x\|^2 - 3x_3^2 \end{pmatrix},$$

woraus für $x \in X$ die Divergenzfreiheit

$$\operatorname{div} E(x) = \sum_{k=1}^{3} D_k E_k(x) = \frac{1}{\|x\|^5} \sum_{k=1}^{3} \left(\|x\|^2 - 3x_k^2\right) = 0$$

sowie aufgrund der Symmetrie der Funktionalmatrix auch die Wirbelfreiheit

$$\operatorname{rot} E(x) = \begin{pmatrix} D_2 E_3(x) - D_3 E_2(x) \\ D_3 E_1(x) - D_1 E_3(x) \\ D_1 E_2(x) - D_2 E_1(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{\|x\|^5} \begin{pmatrix} -3x_3x_2 + 3x_2x_3 \\ -3x_1x_3 + 3x_3x_1 \\ -3x_2x_1 + 3x_1x_2 \end{pmatrix} = 0$$

des elektrischen Felds folgt. □

Aufgabe 5. Seien ein endlichdimensionaler linearer normierter Raum V, ferner eine Basis $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ von V vorgegeben sowie die Abbildung $f : X \to \mathbb{R}$ auf der offenen Teilmenge $X = \{T_0 \in L(V;V) \mid \det(T_0) \neq 0\}$ von $L(V;V)$ durch die Vorschrift $f(T_0) = \det(T_0)$ für $T_0 \in X$ definiert.

1. Man zeige die Existenz der Richtungsableitung $Df(I_V)(T) \in \mathbb{R}$ von f im Punkt $I_V \in X$ in Richtung $T \in L(V;V)$, die man auch *Spur* $\operatorname{tr}(T) \in \mathbb{R}$ *von* T nennt!

2. Man weise nach, daß die Richtungsableitung $Df(T_0)(T) \in \mathbb{R}$ von f im Punkt $T_0 \in X$ in Richtung $T \in L(V;V)$ existiert und $Df(T_0)(T) = \det(T_0)\operatorname{tr}(T_0^{-1}T)$ gilt!

Lösung. 1. Sei $F : V^n \to \mathbb{R}$ eine alternierende n-Linearform mit $F(u_1, \ldots, u_n) \neq 0$. Wird $T \in L(V;V)$ vorgegeben und definiert man die Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$h(\delta) = F\big((I_V + \delta T)(u_1), \ldots, (I_V + \delta T)(u_n)\big) \quad \text{für } \delta \in \mathbb{R},$$

so liefert die Definition der Determinante für alle $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta \neq 0$ die Beziehung

$$\frac{h(\delta) - h(0)}{\delta} = \frac{\det(I_V + \delta T) - \det(I_V)}{\delta} F(u_1, \ldots, u_n),$$

die Ausgangspunkt für die Untersuchung des Grenzprozesses $\delta \to 0$ sein soll:

2. Da die n-Linearform $F : V^n \to \mathbb{R}$ die Richtungsableitung

$$DF(w_1, \ldots, w_n)(v_1, \ldots, v_n) = \sum_{\ell=1}^{n} F(w_1, \ldots, w_{\ell-1}, v_\ell, w_{\ell+1}, \ldots, w_n)$$

für alle $(w_1, \ldots, w_n)$, $(v_1, \ldots, v_n) \in V^n$ besitzt, liefert die Kettenregel somit

$$\begin{aligned} Dh(0) &= DF(u_1, \ldots, u_n)(T(u_1), \ldots, T(u_n)) \\ &= \sum_{\ell=1}^{n} F(u_1, \ldots, u_{\ell-1}, T(u_\ell), u_{\ell+1}, \ldots, u_n). \end{aligned}$$

Stellt man für jedes $\ell \in \{1, \ldots, n\}$ das Bild $T(u_\ell) = \sum_{k=1}^{n} \tau_{k\ell} u_k \in V$ mit Hilfe der Koordinaten $\tau_{1\ell}, \ldots, \tau_{n\ell} \in \mathbb{R}$ bzgl. der Basis B dar, so ergibt sich aufgrund der Eigenschaften alternierender n-Linearformen

$$Dh(0) = \sum_{\ell=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \tau_{k\ell} F(u_1, \ldots, u_{\ell-1}, u_k, u_{\ell+1}, \ldots, u_n) = \sum_{\ell=1}^{n} \tau_{\ell\ell} F(u_1, \ldots, u_n)$$

und somit wegen Schritt 1 die Existenz des Grenzwerts

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{\det(I_V + \delta T) - \det(I_V)}{\delta} F(u_1, \ldots, u_n) = Dh(0) = \sum_{\ell=1}^{n} \tau_{\ell\ell} F(u_1, \ldots, u_n).$$

Die gesuchte Richtungsableitung in Richtung $T \in L(V;V)$ ist folglich

$$\operatorname{tr}(T) = Df(I_V)(T) = \lim_{\delta \to 0} \frac{\det(I_V + \delta T) - \det(I_V)}{\delta} = \sum_{\ell=1}^{n} \tau_{\ell\ell} \in \mathbb{R}.$$

3. Für alle $T_0 \in X$ und $T \in L(V;V)$ ergibt sich daraus die Richtungsableitung

$$
\begin{aligned}
Df(T_0)(T) &= \lim_{\delta \to 0} \frac{\det(T_0 + \delta T) - \det(T_0)}{\delta} \\
&= \det(T_0) \lim_{\delta \to 0} \frac{\det(I_V + \delta T_0^{-1} T) - \det(I_V)}{\delta} = \det(T_0)\, \mathrm{tr}(T_0^{-1} T)
\end{aligned}
$$

aufgrund der Produktregel für Determinanten. $\square$