Übungsaufgaben 9

Kurven und Flächen im Raume

Aufgabe 1. Man weise nach, daß durch

$$\Psi(y) = \begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ y_1 - y_2 \\ 4y_1 y_2 \end{pmatrix} \quad \text{für } y \in \mathbb{R}^2$$

eine globale Parametrisierung $(\mathbb{R}^2, \Psi)$ der zweidimensionalen Untermannigfaltigkeit $P = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = x_1^2 - x_2^2\}$ von $\mathbb{R}^3$ definiert wird, die man als *hyperbolisches Paraboloid* bezeichnet! ⑥

Lösung. 1. Zunächst soll gezeigt werden, daß $\Psi[\mathbb{R}^2] \subset P$ gilt: Wird $y \in \mathbb{R}^2$ beliebig vorgegeben, dann ergibt sich für $x = \Psi(y)$ tatsächlich die Beziehung

$$x_1^2 - x_2^2 = (y_1 + y_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 = 4y_1 y_2 = x_3.$$

2. Um einzusehen, daß umgekehrt auch $P \subset \Psi[\mathbb{R}^2]$ gilt, sei $x \in P$ willkürlich vorgegeben. Für alle Punkte $y \in \mathbb{R}^2$ mit $\Psi(y) = x$ gilt stets $y_1 + y_2 = x_1$ sowie $y_1 - y_2 = x_2$ und somit $y_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ sowie $y_2 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)$. Da außerdem die Beziehung $4y_1 y_2 = x_1^2 - x_2^2 = x_3$ erfüllt ist, gilt somit auch $P \subset \Psi[\mathbb{R}^2]$. Ferner hat die zu $\Psi : \mathbb{R}^2 \to P$ inverse Abbildung $\Psi^{-1} : P \to \mathbb{R}^2$ die Gestalt

$$\Psi^{-1}(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \\ \frac{1}{2}(x_1 - x_2) \end{pmatrix} \quad \text{für } x \in P.$$

Außerdem ist sowohl die Abbildung $\Psi : \mathbb{R}^2 \to P$ als auch ihre inverse Abbildung $\Psi^{-1} : P \to \mathbb{R}^2$ stetig.

3. Die stetig differenzierbare Abbildung $\Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ besitzt in jedem Punkt $y \in \mathbb{R}^2$ die Ableitung

$$D\Psi(y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 4y_2 & 4y_1 \end{pmatrix},$$

woraus sich ergibt, daß $D\Psi(y) \in L(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^3)$ für jedes $y \in \mathbb{R}^2$ injektiv und $(\mathbb{R}^2, \Psi)$ somit eine globale Parametrisierung der zweidimensionalen Untermannigfaltigkeit P von $\mathbb{R}^3$ ist, die auf zwei Arten durch eine Schar von Geraden parametrisiert wird. □

Aufgabe 2. Seien die Oberfläche $S = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\|^2 = 1\}$ der Einheitskugel im euklidischen Raum $\mathbb{R}^{n+1}$ sowie die jeweils um einen Punkt reduzierten Teilmengen

$$S_\oplus = \{x \in S \mid x_{n+1} < 1\} \quad \text{sowie} \quad S_\ominus = \{x \in S \mid x_{n+1} > -1\}$$

von S gegeben. Man zeige, daß für $y \in \mathbb{R}^n$ durch

$$\Psi_\oplus(y) = \frac{2}{\|y\|^2 + 1} \begin{pmatrix} y \\ \frac{1}{2}(\|y\|^2 - 1) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Psi_\ominus(y) = \frac{2}{\|y\|^2 + 1} \begin{pmatrix} y \\ \frac{1}{2}(1 - \|y\|^2) \end{pmatrix}$$

eine lokale Parametrisierung $(\mathbb{R}^n, \Psi_\oplus)$ von S nahe $x \in S_\oplus$ sowie eine lokale Parametrisierung $(\mathbb{R}^n, \Psi_\ominus)$ von S nahe $x \in S_\ominus$ definiert wird! ⑥

Lösung. 1. Zunächst soll gezeigt werden, daß für jede Wahl des Parameters $y \in \mathbb{R}^n$ stets $x = \Psi_\oplus(y) \in S_\oplus$ sowie $\xi = \Psi_\ominus(y) \in S_\ominus$ gilt: Tatsächlich erhält man

$$\|x\|^2 = \frac{4\|y\|^2 + (\|y\|^2 - 1)^2}{(\|y\|^2 + 1)^2} = \frac{(\|y\|^2 + 1)^2}{(\|y\|^2 + 1)^2} = 1, \quad x_{n+1} = \frac{\|y\|^2 - 1}{\|y\|^2 + 1} < 1,$$
$$\|\xi\|^2 = \frac{4\|y\|^2 + (1 - \|y\|^2)^2}{(\|y\|^2 + 1)^2} = \frac{(\|y\|^2 + 1)^2}{(\|y\|^2 + 1)^2} = 1, \quad \xi_{n+1} = \frac{1 - \|y\|^2}{\|y\|^2 + 1} > -1.$$

2.1. Seien umgekehrt beliebige Punkte $x \in S_\oplus$ und $\xi \in S_\ominus$ vorgegeben. Für alle Punkte $y_\oplus \in \mathbb{R}^n$ und $y_\ominus \in \mathbb{R}^n$ mit $\Psi_\oplus(y_\oplus) = x$ und $\Psi_\ominus(y_\ominus) = \xi$ gilt zunächst

$$x_{n+1} = \frac{\|y_\oplus\|^2 - 1}{\|y_\oplus\|^2 + 1} \quad \text{bzw.} \quad \xi_{n+1} = \frac{1 - \|y_\ominus\|^2}{\|y_\ominus\|^2 + 1}$$

und somit

$$1 - x_{n+1} = \frac{2}{\|y_\oplus\|^2 + 1} \quad \text{bzw.} \quad 1 + \xi_{n+1} = \frac{2}{\|y_\ominus\|^2 + 1}.$$

Daraus folgt

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (1 - x_{n+1}) y_\oplus \in \mathbb{R}^n \quad \text{sowie} \quad \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = (1 + \xi_{n+1}) y_\ominus \in \mathbb{R}^n$$

und somit wegen $x_{n+1} < 1$ und $\xi_{n+1} > -1$ die Existenz der inversen Abbildungen $\Psi_\oplus^{-1} : S_\oplus \to \mathbb{R}^n$ und $\Psi_\ominus^{-1} : S_\ominus \to \mathbb{R}^n$, die durch

$$\Psi_\oplus^{-1}(x) = \frac{1}{1 - x_{n+1}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \text{sowie} \quad \Psi_\ominus^{-1}(\xi) = \frac{1}{1 + \xi_{n+1}} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

für $x \in S_\oplus$ sowie $\xi \in S_\ominus$ gegeben sind.

2.2. Offenbar sind die Abbildungen $\Psi_\oplus : \mathbb{R}^n \to S_\oplus$ und $\Psi_\ominus : \mathbb{R}^n \to S_\ominus$ sowie auch deren inverse Abbildungen stetig und somit Homöomorphismen.

3.1. Die stetig differenzierbare Abbildung $\Psi_\oplus : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ besitzt die Ableitung

$$\frac{1}{(\|y\|^2+1)^2}\begin{pmatrix} 2(\|y\|^2+1)-4y_1^2 & -4y_1y_2 & \cdots & -4y_1y_n \\ -4y_2y_1 & 2(\|y\|^2+1)-4y_2^2 & \cdots & -4y_2y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -4y_ny_1 & -4y_ny_2 & \cdots & 2(\|y\|^2+1)-4y_n^2 \\ 4y_1 & 4y_2 & \cdots & 4y_n \end{pmatrix}$$

in jedem Punkt $y \in \mathbb{R}^n$. Addiert man für jedes $k \in \{1,\dots,n\}$ jeweils das y_k-fache der letzten Zeile zur k-ten Zeile, so ergibt sich, daß $D\Psi_\oplus(y) \in L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^{n+1})$ für jedes $y \in \mathbb{R}^n$ injektiv und $(\mathbb{R}^n, \Psi_\oplus)$ eine lokale Parametrisierung von S nahe $x \in S_\oplus$ ist.

3.2. Die stetig differenzierbare Abbildung $\Psi_\ominus : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ besitzt die Ableitung

$$\frac{1}{(\|y\|^2+1)^2}\begin{pmatrix} 2(\|y\|^2+1)-4y_1^2 & -4y_1y_2 & \cdots & -4y_1y_n \\ -4y_2y_1 & 2(\|y\|^2+1)-4y_2^2 & \cdots & -4y_2y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -4y_ny_1 & -4y_ny_2 & \cdots & 2(\|y\|^2+1)-4y_n^2 \\ -4y_1 & -4y_2 & \cdots & -4y_n \end{pmatrix}$$

in jedem Punkt $y \in \mathbb{R}^n$. Subtrahiert man für jeden Index $k \in \{1,\dots,n\}$ jeweils das y_k-fache der letzten Zeile von der k-ten Zeile, so folgt, daß $D\Psi_\ominus(y) \in L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^{n+1})$ für jedes $y \in \mathbb{R}^n$ injektiv und damit $(\mathbb{R}^n, \Psi_\ominus)$ eine lokale Parametrisierung von S nahe $x \in S_\ominus$ ist. $\square$

Aufgabe 3. Man zeige, daß sich für jede Wahl der reellen Parameter $\alpha_1 \neq 1, \alpha_2 \neq 0$, $\alpha_3 \neq 0$ die drei Kugeloberflächen

$$\begin{aligned} S_1 &= \{x \in \mathbb{R}^3 \mid (x_1-\alpha_1)^2 + x_2^2 + x_3^2 = (1-\alpha_1)^2\},\\ S_2 &= \{x \in \mathbb{R}^3 \mid (x_1-1)^2 + (x_2-\alpha_2)^2 + x_3^2 = \alpha_2^2\},\\ S_3 &= \{x \in \mathbb{R}^3 \mid (x_1-1)^2 + x_2^2 + (x_3-\alpha_3)^2 = \alpha_3^2\} \end{aligned}$$

jeweils paarweise senkrecht schneiden! ⑧

Lösung. 1. Sei $S = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x-a\|^2 = r^2\}$ die Oberfläche der Kugel mit dem Mittelpunkt $a \in \mathbb{R}^3$ und dem Radius $r > 0$. Erklärt man durch $F(x) = \|x-a\|^2 - r^2$ für $x \in \mathbb{R}^3$ die stetig differenzierbare Funktion $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, so erhält man die Darstellung $S = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid F(x) = 0\}$. Da die Funktion F in $x \in S$ die Ableitung

$$\langle DF(x), \xi\rangle = 2(x-a|\xi) \quad \text{in Richtung } \xi \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ besitzt,}$$

folgt aus $x - a \neq 0$ die Surjektivität von $DF(x) \in L(\mathbb{R}^3;\mathbb{R})$. Demnach ist S eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$. Der Tangentialraum an S in $x \in S$ ist die zum Radiusvektor $x - a \in \mathbb{R}^3$ orthogonale Hyperebene

$$TS(x) = \{\xi \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (x-a|\xi) = 0\}.$$

2. Zwei Kugeloberflächen schneiden sich, wenn der Abstand der Kugelmittelpunkte kleiner ist als die Summe der beiden Kugelradien. Sie schneiden sich überall senkrecht, wenn sich jeweils die Tangentialräume an beide Kugeloberflächen in jedem Schnittpunkt senkrecht schneiden. Dies ist gleichbedeutend damit, daß die Radiusvektoren der beiden Kugeln in jedem Schnittpunkt orthogonal zueinander sind.

3.1. Der Abstand $\|a_1 - a_2\| > 0$ der Mittelpunkte

$$a_1 = \begin{pmatrix}\alpha_1\\0\\0\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad a_2 = \begin{pmatrix}1\\\alpha_2\\0\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

der Kugeloberflächen S_1 und S_2 ist kleiner als die Summe der Radien $r_1 = |\alpha_1 - 1| > 0$ und $r_2 = |\alpha_2| > 0$, denn es gilt

$$\|a_1-a_2\|^2 = (\alpha_1-1)^2 + \alpha_2^2 = r_1^2 + r_2^2 < (r_1+r_2)^2.$$

Somit schneiden sich die Kugeloberflächen S_1 und S_2. Liegt $x \in S_1 \cap S_2$ im Durchschnitt dieser Flächen, so folgt

$$2(x-a_1|x-a_2) = \|x-a_1\|^2 + \|x-a_2\|^2 - \|a_1-a_2\|^2 = r_1^2 + r_2^2 - \|a_1-a_2\|^2 = 0.$$

Damit stehen die Radiusvektoren $x - a_1 \in \mathbb{R}^3$ und $x - a_2 \in \mathbb{R}^3$ der beiden Kugeloberflächen S_1 bzw. S_2 in jedem Schnittpunkt $x \in S_1 \cap S_2$ senkrecht aufeinander, das heißt, die Kugeloberflächen S_1 und S_2 schneiden sich überall senkrecht.

3.2. Der Abstand $\|a_1 - a_3\| > 0$ der Mittelpunkte

$$a_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

der Kugeloberflächen S_1 und S_3 ist kleiner als die Summe der Radien $r_1 = |\alpha_1 - 1| > 0$ und $r_3 = |\alpha_3| > 0$, denn es gilt

$$\|a_1 - a_3\|^2 = (\alpha_1 - 1)^2 + \alpha_3^2 = r_1^2 + r_3^2 < (r_1 + r_3)^2.$$

Somit schneiden sich die Kugeloberflächen S_1 und S_3. Liegt $x \in S_1 \cap S_3$ im Durchschnitt dieser Flächen, so folgt

$$2(x - a_1 | x - a_3) = \|x - a_1\|^2 + \|x - a_3\|^2 - \|a_1 - a_3\|^2 = r_1^2 + r_3^2 - \|a_1 - a_3\|^2 = 0.$$

Damit stehen die Radiusvektoren $x - a_1 \in \mathbb{R}^3$ und $x - a_3 \in \mathbb{R}^3$ der beiden Kugeloberflächen S_1 bzw. S_3 in jedem Schnittpunkt $x \in S_1 \cap S_3$ senkrecht aufeinander, das heißt, die Kugeloberflächen S_1 und S_3 schneiden sich überall senkrecht.

3.3. Der Abstand $\|a_2 - a_3\| > 0$ der Mittelpunkte

$$a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

der Kugeloberflächen S_2 und S_3 ist kleiner als die Summe der Radien $r_2 = |\alpha_2| > 0$ und $r_3 = |\alpha_3| > 0$, denn es gilt

$$\|a_2 - a_3\|^2 = \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = r_2^2 + r_3^2 < (r_2 + r_3)^2.$$

Somit schneiden sich die Kugeloberflächen S_2 und S_3. Liegt $x \in S_2 \cap S_3$ im Durchschnitt dieser Flächen, so folgt

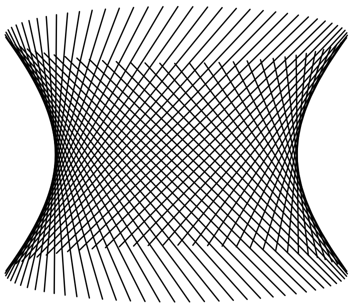
$$2(x - a_2 | x - a_3) = \|x - a_2\|^2 + \|x - a_3\|^2 - \|a_2 - a_3\|^2 = r_2^2 + r_3^2 - \|a_2 - a_3\|^2 = 0.$$

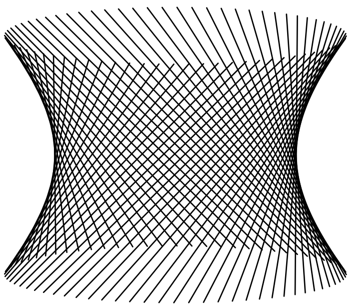
Damit stehen die Radiusvektoren $x - a_2 \in \mathbb{R}^3$ und $x - a_3 \in \mathbb{R}^3$ der beiden Kugeloberflächen S_2 bzw. S_3 in jedem Schnittpunkt $x \in S_2 \cap S_3$ senkrecht aufeinander, das heißt, die Kugeloberflächen S_2 und S_3 schneiden sich überall senkrecht. $\square$

Aufgabe 4. Sei $\varphi \in \mathbb{R}$ beliebig vorgegeben. Man weise nach, daß durch

$$\Psi_\oplus(y) = \begin{pmatrix} \cos y_1 \\ \sin y_1 \\ 0 \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} -\sin y_1 \\ \cos y_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Psi_\ominus(y) = \begin{pmatrix} \cos y_1 \\ \sin y_1 \\ 0 \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} \sin y_1 \\ -\cos y_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

für $y \in Y =]\varphi, \varphi + 2\pi[\times \mathbb{R}$ zwei lokale Parametrisierungen $(Y, \Psi_\oplus)$ und $(Y, \Psi_\ominus)$ der zweidimensionalen Untermannigfaltigkeit $H = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1\}$ von $\mathbb{R}^3$ definiert werden, die man als *einschaliges Hyperboloid* bezeichnet!





Lösung. 1. Zunächst wird überprüft, daß für jede Wahl des Parameters $y \in Y$ die Punkte $x = \Psi_\oplus(y)$, $\xi = \Psi_\ominus(y)$ in H liegen: In der Tat gilt

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = (\cos y_1 - y_2 \sin y_1)^2 + (\sin y_1 + y_2 \cos y_1)^2 - y_2^2 = 1,$$
$$\xi_1^2 + \xi_2^2 - \xi_3^2 = (\cos y_1 + y_2 \sin y_1)^2 + (\sin y_1 - y_2 \cos y_1)^2 - y_2^2 = 1.$$

2. Seien die Gerade $G = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid y_1 = \varphi\}$ und beliebige Punkte $x \in H \setminus \Psi_\oplus[G]$ sowie $\xi \in H \setminus \Psi_\ominus[G]$ gegeben. Dann werden die Winkel $\alpha_1, \beta_1 \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ durch

$$1 = \sqrt{1 + x_3^2}\, \cos\alpha_1, \quad 1 = \sqrt{1 + \xi_3^2}\, \cos\beta_1,$$
$$x_3 = \sqrt{1 + x_3^2}\, \sin\alpha_1, \quad \xi_3 = \sqrt{1 + \xi_3^2}\, \sin\beta_1$$

sowie die Winkel $\alpha_2, \beta_2 \in [\varphi, \varphi + 2\pi[$ durch

$$x_1 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\, \cos(\alpha_2 + \alpha_1), \quad \xi_1 = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}\, \cos(\beta_2 - \beta_1),$$
$$x_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\, \sin(\alpha_2 + \alpha_1), \quad \xi_2 = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}\, \sin(\beta_2 - \beta_1)$$

eindeutig festgelegt. Wegen $x, \xi \in H$ folgt daraus

$$x_1 = \sqrt{1 + x_3^2}\,(\cos\alpha_2 \cos\alpha_1 - \sin\alpha_2 \sin\alpha_1) = \cos\alpha_2 - x_3 \sin\alpha_2,$$
$$x_2 = \sqrt{1 + x_3^2}\,(\sin\alpha_2 \cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 \sin\alpha_1) = \sin\alpha_2 + x_3 \cos\alpha_2,$$
$$\xi_1 = \sqrt{1 + \xi_3^2}\,(\cos\beta_2 \cos\beta_1 + \sin\beta_2 \sin\beta_1) = \cos\beta_2 + \xi_3 \sin\beta_2,$$
$$\xi_2 = \sqrt{1 + \xi_3^2}\,(\sin\beta_2 \cos\beta_1 - \cos\beta_2 \sin\beta_1) = \sin\beta_2 - \xi_3 \cos\beta_2.$$

Damit sind die beiden Parameter $y_\oplus = (\alpha_2, x_3) \in Y$ und $y_\ominus = (\beta_2, \xi_3) \in Y$ mit $\Psi_\oplus(y_\oplus) = x \in H \setminus \Psi_\oplus[G]$ und $\Psi_\ominus(y_\ominus) = \xi \in H \setminus \Psi_\ominus[G]$ eindeutig bestimmt.

3. Für die durch die Vorschrift

$$F_\oplus(r,y) = r\Psi_\oplus(y), \quad F_\ominus(r,y) = r\Psi_\ominus(y) \quad \text{für } (r,y) \in \,]0,\infty] \times Y$$

fortgesetzten stetig differenzierbaren Abbildungen $F_\oplus$, $F_\ominus : \,]0,\infty[\, \times Y \to \mathbb{R}^3$ ist die Ableitung

$$DF_\oplus(r,y) = \begin{pmatrix} \cos y_1 - y_2 \sin y_1 & -r \sin y_1 - r y_2 \cos y_1 & -r \sin y_1 \\ \sin y_1 + y_2 \cos y_1 & r \cos y_1 - r y_2 \sin y_1 & r \cos y_1 \\ y_2 & 0 & r \end{pmatrix} \in L(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$$

bzw.

$$DF_\ominus(r,y) = \begin{pmatrix} \cos y_1 + y_2 \sin y_1 & -r \sin y_1 + y_2 r \cos y_1 & r \sin y_1 \\ \sin y_1 - y_2 \cos y_1 & r \cos y_1 + y_2 r \sin y_1 & -r \cos y_1 \\ y_2 & 0 & r \end{pmatrix} \in L(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$$

in jedem Punkt $(r,y) \in \,]0,\infty] \times Y$ jeweils ein Isomorphismus. Der Satz über den lokalen Diffeomorphismus liefert somit für jedes $(r,y) \in \,]0,\infty[\, \times Y$ offene Mengen $Y_0 \subset \,]0,\infty[\, \times Y$ mit $(r,y) \in Y_0$ sowie $X_\oplus$, $X_\ominus \subset \mathbb{R}^3$ mit $F_\oplus(r,y) \in X_\oplus$ und $F_\oplus(r,y) \in X_\oplus$, so daß $F_\oplus$ ein Homöomorphismus von Y_0 auf $X_\oplus$ sowie $F_\oplus$ ein Homöomorphismus von Y_0 auf $X_\ominus$ ist.

Damit sind $(Y, \Psi_\oplus)$ und $(Y, \Psi_\ominus)$ lokale Parametrisierungen der zweidimensionalen Untermannigfaltigkeit H von $\mathbb{R}^3$, die somit auf zweierlei Art durch eine Schar von Geraden parametrisiert wird. $\square$

Aufgabe 5. Sei $V = \mathbb{R}^{n\times n}$ der lineare normierte Raum der $(n \times n)$-Matrizen sowie desweiteren $M = \{Q \in V \mid QQ^\intercal = E_n\}$ die Teilmenge der orthogonalen Matrizen.

1. Man zeige, daß M eine $\binom{n}{2}$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von V ist!

2. Man weise nach, daß der Tangentialraum an M im Punkt $Q \in M$ der lineare Teilraum $TM(Q) = \{A_1 Q \in V \mid A_1 \in V,\ A_1^\intercal = -A_1\}$ von V ist!

Lösung. 1. Wie bereits in der Matrizentheorie gezeigt wurde, ist der lineare Raum $V = V_0 + V_1$ die direkte Summe der beiden linearen Teilräume

$$V_0 = \{A_0 \in V \mid A_0^\intercal = A_0\} \quad \text{und} \quad V_1 = \{A_1 \in V \mid A_1^\intercal = -A_1\}$$

von V, welche die Dimensionen $\dim V_0 = \binom{n+1}{2}$ sowie $\dim V_1 = \binom{n}{2}$ haben.

2. Definiert man die stetig differenzierbare Abbildung $F : V \to V_0$ durch

$$F(A) = AA^\intercal - E_n \in V_0 \quad \text{für } A \in V,$$

so ergibt sich einerseits die formale Darstellung $M = \{A \in V \mid F(A) = 0\}$ und andererseits die Ableitung von F im Punkt $Q \in M$ in Richtung $A \in V$ als

$$\begin{aligned} DF(Q)(A) &= \lim_{\delta\to 0} \tfrac{1}{\delta}\big((Q+\delta A)(Q+\delta A)^\intercal - QQ^\intercal\big) \\ &= \lim_{\delta\to 0} \big(AQ^\intercal + QA^\intercal + \delta AA^\intercal\big) = AQ^\intercal + QA^\intercal \in V_0. \end{aligned}$$

3. Um einzusehen, daß M eine Untermannigfaltigkeit von V der Dimension $\binom{n}{2}$ ist, genügt der Nachweis, daß der Bildraum $DF(Q)[V]$ ein Teilraum von V_0 der Dimension $\dim V - \binom{n}{2} = \binom{n+1}{2}$ ist. Dies ist äquivalent dazu, daß man nachweist, daß der Kern

$$U = \{A \in V \mid DF(Q)(A) = 0\} = \{A \in V \mid AQ^\intercal + QA^\intercal = 0\}$$

die Dimension $\dim V - \binom{n+1}{2} = \binom{n}{2}$ besitzt. Für $A \in V$ gilt genau dann $A \in U$, wenn

$$AQ^\intercal = -QA^\intercal = -(AQ^\intercal)^\intercal$$

und somit $AQ^\intercal \in V_1$ gilt. Dies ist jedoch gleichbedeutend damit, daß ein $A_1 \in V_1$ mit $AQ^\intercal = A_1$, also $A = A_1 Q$ existiert, woraus sich die Darstellung

$$U = \{A_1 Q \in V \mid A_1 \in V_1\} \quad \text{ergibt.}$$

Da die durch $G(A) = AQ$ für $A \in V$ definierte Abbildung $G \in L(V;V)$ ein Isomorphismus von V auf V ist, folgt schließlich $\dim U = \dim G[V_1] = \dim V_1 = \binom{n}{2}$. Somit ist M eine Untermannigfaltigkeit von V der Dimension $\binom{n}{2}$ mit

$$TM(Q) = \{A \in V \mid DF(Q)(A) = 0\} = U = \{A_1 Q \in V \mid A_1 \in V_1\}$$

als Tangentialraum an M im Punkt $Q \in M$. $\square$

Aufgabe 6. Man zeige, daß der Durchschnitt des Doppelkegels

$$\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = x_3^2\}$$

und der affinen Hyperebene

$$\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 2\}$$

eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit M von $\mathbb{R}^3$ ist und bestimme den Tangentialraum an M in $x \in M$!

Lösung. 1. Erklärt man die stetig differenzierbare Funktion $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$F(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 2 \end{pmatrix} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^3,$$

so erhält man einerseits die formale Darstellung $M = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid F(x) = 0\}$ und andererseits als Ableitung von F in $x \in M$ die Funktionalmatrix

$$DF(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 & -2x_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in L(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^2)$$

Würde es einen Punkt $x \in M$ mit $x_1 = x_2 = -x_3$ geben, so müßte $x = 0$ wegen $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$ gelten, was aber im Widerspruch zu $x_1 + x_2 + x_3 = 2$ stünde. Es gibt also *keinen* Punkt $x \in M$ mit $x_1 = x_2 = -x_3$, woraus folgt, daß $DF(x) \in L(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^2)$ für alle $x \in M$ surjektiv und demzufolge M eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ ist.

2. Außerdem erhält man die Gerade

$$TM(x) = \{\xi \in \mathbb{R}^3 \mid x_1\xi_1 + x_2\xi_2 - x_3\xi_3 = 0,\ \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0\}$$

als Tangentialraum an M in $x \in M$ ist. Sucht man für einen beliebig vorgegebenen Punkt $x \in M$ nach den Lösungen des homogenen Gleichungssystems

$$\begin{array}{ccccccc} x_1\xi_1 & + & x_2\xi_2 & + & (x_1 + x_2 - 2)\xi_3 & = & 0 \\ \xi_1 & + & \xi_2 & + & \xi_3 & = & 0, \end{array}$$

so liefert die Subtraktion des x_1-fachen bzw. des x_2-fachen der zweiten von der ersten Zeile das System

$$\begin{array}{ccccc} (x_2 - x_1)\xi_2 & + & (x_2 - 2)\xi_3 & = & 0 \\ (x_1 - x_2)\xi_1 & + & (x_1 - 2)\xi_3 & = & 0, \end{array}$$

woraus sich der Tangentialvektor

$$\xi = \begin{pmatrix} x_1 - 2 \\ 2 - x_2 \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

an M in $x \in M$ mit der Eigenschaft $TM(x) = \mathrm{lin}\{\xi\}$ ergibt. □