Vorlesung 1

Lineare Gleichungssysteme

Ist $\mathbb{K}$ ein Körper, so soll die Lösbarkeit von *Systemen von* $m \in \mathbb{N}$ *linearen Gleichungen*

$$
\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + \cdots + & a_{1\ell}x_\ell & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & y_1 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{k1}x_1 & + \cdots + & a_{k\ell}x_\ell & + \cdots + & a_{kn}x_n & = & y_k \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + \cdots + & a_{m\ell}x_\ell & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & y_m
\end{array}
$$

mit $n \in \mathbb{N}$ Unbekannten $x_1, \ldots, x_\ell, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ zu vorgegebenen rechten Seiten $y_1, \ldots, y_k, \ldots, y_m \in \mathbb{K}$ und Koeffizienten $a_{k\ell} \in \mathbb{K}$ für $k \in \{1, \ldots, m\}$, $\ell \in \{1, \ldots, n\}$ untersucht werden. Gilt dabei $y_k = \mathbb{0}$ für alle $k \in \{1, \ldots, m\}$, so heißt das lineare Gleichungssystem *homogen*, anderenfalls wird es als *inhomogen* bezeichnet.

Gauß-Algorithmus. Um die Lösungen des linearen Gleichungssystems zu bestimmen, benötigt man folgende *elementare* äquivalente Umformungen:

1. Multiplikation einer Gleichung mit einem von $\mathbb{0}$ verschiedenen Faktor
2. Addition des Vielfachen einer Gleichung zu einer anderen Gleichung
3. Vertauschung zweier Gleichungen
4. Vertauschung zweier Spalten von Summanden auf der linken Seite.

Schritt 1.1. Wahl von $k \in \{1, \ldots, m\}$ und $\ell \in \{1, \ldots, n\}$ mit $a_{k\ell} \neq \mathbb{0}$, falls möglich.

Schritt 1.2. Vertauschung der Gleichungen 1 und k sowie der Spalten 1 und ℓ.

$$
\begin{array}{ccccccclll}
a_{k\ell}x_\ell & + \cdots + & a_{k1}x_1 & + \cdots + & a_{kn}x_n & = & y_k & \mid : a_{k\ell} & \cdot(-a_{1\ell}) & \cdot(-a_{m\ell}) \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & \\
a_{1\ell}x_\ell & + \cdots + & a_{11}x_1 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & y_1 & & + & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & \\
a_{m\ell}x_\ell & + \cdots + & a_{m1}x_1 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & y_m & & & +
\end{array}
$$

Schritt 1.3. Ausräumung von Spalte 1 durch Addition geeigneter Vielfacher von Gleichung 1 zu allen anderen Gleichungen.

$$
\begin{array}{cccccccccc}
x_1' & + & a_{12}'x_2' & + \cdots + & a_{1\ell}'x_\ell' & + \cdots + & a_{1n}'x_n' & = & y_1' \\
 & & a_{22}'x_2' & + \cdots + & a_{2\ell}'x_\ell' & + \cdots + & a_{2n}'x_n' & = & y_2' \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & a_{k2}'x_2' & + \cdots + & a_{k\ell}'x_\ell' & + \cdots + & a_{kn}'x_n' & = & y_k' \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & a_{m2}'x_2' & + \cdots + & a_{m\ell}'x_\ell' & + \cdots + & a_{mn}'x_n' & = & y_m'
\end{array}
$$

Schritt 2.1. Wahl von $k \in \{2, \dots, m\}$ und $\ell \in \{2, \dots, n\}$ mit $a'_{k\ell} \neq \mathbb{0}$, falls möglich.

Schritt 2.2. Vertauschung der Gleichungen 2 und k sowie der Spalten 2 und ℓ.

$$
\begin{array}{ccccccccccl}
x'_1 + & a'_{1\ell}x'_\ell & + \cdots + & a'_{12}x'_2 & + \cdots + & a'_{1n}x'_n & = & y'_1 & & & + \\
& a'_{k\ell}x'_\ell & + \cdots + & a'_{k2}x'_2 & + \cdots + & a'_{kn}x'_n & = & y'_k & \mid : a'_{k\ell} & & \cdot(-a'_{1\ell}) \quad \cdot(-a'_{2\ell}) \quad \cdot(-a'_{m\ell}) \\
& \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & \\
& a'_{2\ell}x'_\ell & + \cdots + & a'_{22}x'_2 & + \cdots + & a'_{2n}x'_n & = & y'_2 & & & + \\
& \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & \\
& a'_{m\ell}x'_\ell & + \cdots + & a'_{m2}x'_2 & + \cdots + & a'_{mn}x'_n & = & y'_m & & & +
\end{array}
$$

Schritt 2.3. Ausräumung von Spalte 2 durch Addition geeigneter Vielfacher von Gleichung 2 zu allen anderen Gleichungen.

$$
\begin{array}{cccccccccc}
x''_1 & & + & a''_{13}x''_3 & + \cdots + & a''_{1\ell}x''_\ell & + \cdots + & a''_{1n}x''_n & = & y''_1 \\
& x''_2 & + & a''_{23}x''_3 & + \cdots + & a''_{2\ell}x''_\ell & + \cdots + & a''_{2n}x''_n & = & y''_2 \\
& & & a''_{33}x''_3 & + \cdots + & a''_{3\ell}x''_\ell & + \cdots + & a''_{3n}x''_n & = & y''_3 \\
& & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
& & & a''_{k3}x''_3 & + \cdots + & a''_{k\ell}x''_\ell & + \cdots + & a''_{kn}x''_n & = & y''_k \\
& & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
& & & a''_{m3}x''_3 & + \cdots + & a''_{m\ell}x''_\ell & + \cdots + & a''_{mn}x''_n & = & y''_m
\end{array}
$$

Fortsetzung und Abbruchkriterium. Kann nach $r \in \big\{0, \dots, \min\{m, n\}\big\}$ analogen Schritten des Eliminationsverfahrens kein $k \in \{r+1, \dots, m\}$ und $\ell \in \{r+1, \dots, n\}$ mit $a^\circ_{k\ell} \neq \mathbb{0}$ mehr gewählt werden, erhält man ein äquivalentes System mit r nichttrivialen und $m - r$ trivialen Gleichungen in *gestaffelter Endform*

$$
\begin{array}{ccccccc}
x^\circ_1 & & + \; a^\circ_{1r+1}x^\circ_{r+1} & + \cdots + & a^\circ_{1n}x^\circ_n & = & y^\circ_1 \\
& \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
& x^\circ_r & + \; a^\circ_{rr+1}x^\circ_{r+1} & + \cdots + & a^\circ_{rn}x^\circ_n & = & y^\circ_r \\
& & \mathbb{0}x^\circ_{r+1} & + \cdots + & \mathbb{0}x^\circ_n & = & y^\circ_{r+1} \\
& & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
& & \mathbb{0}x^\circ_{r+1} & + \cdots + & \mathbb{0}x^\circ_n & = & y^\circ_m
\end{array}
$$

Lösbarkeit. 1. Das obige lineare Gleichungssystem besitzt genau dann eine Lösung mit den Komponenten $x^\circ_1, \dots, x^\circ_n \in \mathbb{K}$, wenn $y^\circ_k = \mathbb{0}$ für alle $k \in \{r+1, \dots, m\}$ gilt.

2. Sei die Bedingung $y^\circ_k = \mathbb{0}$ für jedes $k \in \{r+1, \dots, m\}$ erfüllt. Das obige System linearer Gleichungen ist genau dann *eindeutig lösbar*, wenn $r = n$ gilt.

Lösungsmenge. Sei die Bedingung $y_k^\circ = \mathbb{0}$ für jedes $k \in \{r+1, \dots, m\}$ erfüllt.

1. Jede Lösung des obigen Systems linearer Gleichungen mit den Komponenten $x_1^\circ, \dots, x_n^\circ \in \mathbb{K}$ ist darstellbar als Summe

$$x_1^\circ = \xi_1^\circ + z_1^\circ, \ \dots \ , x_n^\circ = \xi_n^\circ + z_n^\circ \in \mathbb{K}$$

aus irgendeiner Lösung des linearen inhomogenenen Gleichungssystems

$$\begin{array}{ccccccccc} \xi_1^\circ & & + & a_{1r+1}^\circ \xi_{r+1}^\circ & + & \cdots & + & a_{1n}^\circ \xi_n^\circ & = & y_1^\circ \\ & \ddots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ & & \xi_r^\circ & + \ a_{rr+1}^\circ \xi_{r+1}^\circ & + & \cdots & + & a_{rn}^\circ \xi_n^\circ & = & y_r^\circ \end{array}$$

mit den Komponenten $\xi_1^\circ, \dots, \xi_n^\circ \in \mathbb{K}$ und einer Lösung des linearen homogenen Gleichungssystems

$$\begin{array}{ccccccccc} z_1^\circ & & + & a_{1r+1}^\circ z_{r+1}^\circ & + & \cdots & + & a_{1n}^\circ z_n^\circ & = & \mathbb{0} \\ & \ddots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ & & z_r^\circ & + \ a_{rr+1}^\circ z_{r+1}^\circ & + & \cdots & + & a_{rn}^\circ z_n^\circ & = & \mathbb{0} \end{array}$$

mit den Komponenten $z_1^\circ, \dots, z_n^\circ \in \mathbb{K}$.

2. Eine spezielle Lösung des linearen inhomogenen Gleichungssystems ist stets

$$\xi_1^\circ = y_1^\circ, \dots, \xi_r^\circ = y_r^\circ \in \mathbb{K}, \quad \xi_{r+1}^\circ, \dots, \xi_n^\circ = \mathbb{0}.$$

3. Jede Lösung des linearen homogenen Gleichungssystems hat die Gestalt

$$z_1^\circ = -\sum_{\ell=r+1}^{n} a_{1\ell}^\circ z_\ell^\circ, \ \dots \ , z_r^\circ = -\sum_{\ell=r+1}^{n} a_{r\ell}^\circ z_\ell^\circ \in \mathbb{K}, \quad z_{r+1}^\circ, \dots, z_n^\circ \in \mathbb{K},$$

wobei die $n - r$ Komponenten $z_{r+1}^\circ, \dots, z_n^\circ \in \mathbb{K}$ der Lösung frei wählbar sind.