Vorlesung 11

Symmetrische und orthogonale Operatoren

Sei V ein euklidischer Raum mit dem Skalarprodukt $(\ |\ ) : V \times V \to \mathbb{R}$ sowie $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Orthonormalbasis von V.

Dualitätsabbildung. 1. Diejenige lineare Abbildung $J_V \in L(V; V^*)$, welche jedem Vektor $u \in V$ die durch $\langle J_V(u), v\rangle = (u|v)$ für alle $v \in V$ definierte Linearform $J_V(u) \in V^*$ zuordnet, heißt *Dualitätsabbildung von* V.

2. Die Dualitätsabbildung $J_V \in L(V; V^*)$ ist ein Isomorphismus von V auf V^*, wobei $F = \big\{J_V(v_1), \dots, J_V(v_n)\big\}$ die zu $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ duale Basis von V^* ist. Die Koordinatendarstellung $\Phi_F J_V \Phi_B^{-1} \in L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ wird durch $E_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ realisiert.

3. Durch $(f|g)^* = \big(J_V^{-1}(f)|J_V^{-1}(g)\big)$ für $f, g \in V^*$ wird ein Skalarprodukt $(\ |\ )^* : V^* \times V^* \to \mathbb{R}$ in V^* und somit eine euklidische Struktur auf V^* definiert.

Symmetrische Operatoren. 1. Ein linearer Operator $T \in L(V; V)$ heißt *symmetrisch*, wenn $(T(u)|v) = (u|T(v))$ für alle $u, v \in V$ gilt.

2. Ein Operator $T \in L(V; V)$ ist genau dann symmetrisch, wenn für den dualen Operator $T^* \in L(V^*; V^*)$ die Beziehung $T^* J_V = J_V T$ gilt.

Matrixdarstellung symmetrischer Operatoren. Sei $T \in L(V; V)$ ein symmetrischer Operator und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die zur Koordinatendarstellung $\Phi_B T \Phi_B^{-1} \in L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ gehörende Matrix. Da $F = \big\{J_V(v_1), \dots, J_V(v_n)\big\}$ die zu $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ duale Basis von V^* und $A^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die zur Koordinatendarstellung $\Phi_F T^* \Phi_F^{-1} \in L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ gehörende Matrix ist, folgt aus $T^* J_V = J_V T$ die Beziehung $A^\mathsf{T} = A$.

Symmetrische und antisymmetrische Matrizen. 1. Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *symmetrisch* bzw. *antisymmetrisch*, wenn $A^\mathsf{T} = A$ bzw. $A^\mathsf{T} = -A$ gilt.

2. Jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ läßt sich in eine Summe aus einer symmetrischen Matrix $\frac{1}{2}(A + A^\mathsf{T}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und einer antisymmetrischen Matrix $\frac{1}{2}(A - A^\mathsf{T}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zerlegen.

Diagonalisierbarkeit symmetrischer Operatoren. Sei $T \in L(V; V)$ symmetrisch.

1. Das durch $\chi(\lambda) = \det(T - \lambda I_V)$ für $\lambda \in \mathbb{R}$ definierte charakteristische Polynom $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von T zerfällt für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ in ein Produkt

$$\chi(\lambda) = \det(T - \lambda I_V) = \prod_{\ell=1}^{n} (\lambda_\ell - \lambda) = (\lambda_1 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda)$$

von Linearfaktoren mit *n nicht notwendig voneinander verschiedenen* reellen Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, das heißt, alle Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ von T sind reell.

2. Der Operator $T \in L(V; V)$ ist diagonalisierbar: Es existiert eine Orthonormalbasis $\{u_1, \dots, u_n\}$ von V aus Eigenvektoren $u_1 \in U_1(\lambda_1), \dots, u_n \in U_1(\lambda_n)$ von T, das heißt, die Eigenräume zu verschiedenen Eigenwerten sind zueinander orthogonal.

Orthogonale Operatoren. 1. Ein linearer Operator $T \in L(V;V)$ heißt *orthogonal* oder *isometrisch*, wenn $(T(u)|T(v)) = (u|v)$ für alle $u,\ v \in V$ gilt. Die Verkettung $ST \in L(V;V)$ zweier orthogonaler Operatoren $S, T \in L(V;V)$ ist orthogonal.

2. Jeder orthogonale Operator $T \in L(V;V)$ ist ein Isomorphismus, und seine Inverse $T^{-1} \in L(V;V)$ ist ebenfalls orthogonal. Ein Isomorphismus $T \in L(V;V)$ ist genau dann orthogonal, wenn für den dualen Operator $T^* \in L(V^*;V^*)$ die Beziehung $T^* J_V = J_V T^{-1}$ gilt.

3. Ein Operator $T \in L(V;V)$ ist genau dann orthogonal, wenn $\big\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\big\}$ für jede Orthonormalbasis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ von V ebenfalls eine Orthonormalbasis ist.

Matrixdarstellung orthogonaler Operatoren. Sei $T \in L(V;V)$ ein orthogonaler Operator und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die zur Koordinatendarstellung $\Phi_B T \Phi_B^{-1} \in L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ gehörende Matrix. Da $F = \big\{J_V(v_1), \ldots, J_V(v_n)\big\}$ die zu $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ duale Basis von V^* und $A^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die zur Koordinatendarstellung $\Phi_F T^* \Phi_F^{-1} \in L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ gehörende Matrix ist, folgt aus $T^* J_V T = J_V$ die Beziehung $A^\top A = E_n$.

Orthogonale Matrizen. 1. Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *orthogonal*, wenn die Beziehung $(A\xi)^\top(Ax) = \xi^\top x$ für alle $\xi, x \in \mathbb{R}^n$ gilt.

2. Jede orthogonale Matrix $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist invertierbar, und ihre Inverse $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist ebenfalls orthogonal. Umgekehrt ist eine invertierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ genau dann orthogonal, wenn $A^\top = A^{-1}$ gilt.

3. Für orthogonale Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt $|\det(A)|^2 = \det(A^\top A) = \det(E_n) = 1$.

4. Jede orthogonale Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\det(A) = 1$ ist das Produkt von höchstens $\binom{n}{2} = \frac{1}{2}n(n-1)$ Matrizen $A_{k\ell}(\varphi) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ der Form

$$\begin{array}{cc}
\begin{matrix} \underline{1} & & & \underline{k} & & & & \underline{\ell} & & & \underline{n} \end{matrix} & \\
\begin{pmatrix}
1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & \cos\varphi & 0 & \cdots & 0 & -\sin\varphi & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & \sin\varphi & 0 & \cdots & 0 & \cos\varphi & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{pmatrix}
&
\begin{matrix} |\,1 \\ \\ \\ |\,k \\ \\ \\ \\ |\,\ell \\ \\ \\ |\,n \end{matrix}
\end{array}$$

mit geeigneten Drehwinkeln $\varphi \in [0, 2\pi]$.