Vorlesung 12

Stetige Abbildungen

Sind V, W und U endlichdimensionale lineare normierte Räume, so werden der Grenzwert- und Stetigkeitsbegriff auf Abbildungen $f : X \to W$ übertragen, wobei der Definitionsbereich X von f eine Teilmenge von V ist.

Konvergenz von Folgen. 1. Eine Folge (x_k) in V heißt *konvergent*, wenn ein Punkt $x \in V$ existiert, so daß es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $k_0 \in \mathbb{N}$ derart gibt, daß $\|x_k - x\| \le \varepsilon$ für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \ge k_0$ gilt. In diesem Falle wird der (dadurch eindeutig bestimmte) Punkt $x \in V$ *Grenzwert* der Folge genannt, und man schreibt $\lim_{k\to\infty} \|x_k - x\| = 0$.

2. Eine Folge in V heißt *divergent*, wenn sie *nicht* konvergent ist.

Cauchy-Kriterium. Eine Folge (x_k) in V konvergiert genau dann, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $k_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so daß $\|x_k - x_\ell\| \le \varepsilon$ für alle $k, \ell \in \mathbb{N}$ mit $k, \ell \ge k_0$ gilt.

Teilfolgen. Ist (k_ℓ) eine Folge natürlicher Zahlen, so daß $k_\ell < k_{\ell+1}$ für alle $\ell \in \mathbb{N}$ gilt und (x_k) eine Folge in V, dann nennt man (x_{k_ℓ}) eine *Teilfolge* von (x_k).

Häufungswerte. Sei (x_k) eine Folge in V und $x \in V$. Dann sind die Aussagen

1. Es gibt eine konvergente Teilfolge (x_{k_ℓ}) von (x_k) mit $\lim_{\ell\to\infty} \|x_{k_\ell} - x\| = 0$.
2. Für jedes $\varepsilon > 0$ existieren unendlich viele verschiedene $k \in \mathbb{N}$ mit $\|x_k - x\| \le \varepsilon$.

äquivalent. In diesem Falle nennt man $x \in V$ einen *Häufungswert* der Folge (x_k).

Satz von Bolzano-Weierstraß. 1. Eine Folge (x_k) in V heißt *beschränkt*, wenn es ein $c \in \mathbb{R}$, $c \ge 0$ gibt, so daß $\|x_k\| \le c$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.

2. Jede konvergente Folge in V ist beschränkt.

3. Jede beschränkte Folge in V besitzt mindestens einen Häufungswert.

Häufungspunkte und abgeschlossene Mengen. 1. Ein Punkt $x_0 \in V$ wird *Häufungspunkt* von X genannt, wenn für jedes $\delta > 0$ ein $x \in X$ mit $0 < \|x - x_0\| \le \delta$ existiert, das heißt, eine Folge (x_k) in $X \setminus \{x_0\}$ mit $\lim_{k\to\infty} \|x_k - x_0\| = 0$ existiert.

2. Ein Punkt $x_0 \in X$ heißt *isoliert*, wenn er *kein* Häufungspunkt von X ist.

3. Die Menge X heißt *abgeschlossen*, wenn X alle Häufungspunkte von X enthält.

4. Die Menge $\{x \in V \mid \|x - x_0\| \le \delta\}$ heißt *abgeschlossene Kugel* um $x_0 \in V$ mit dem Radius $\delta > 0$.

Innere Punkte und offene Mengen. 1. Ein Punkt $x_0 \in X$ wird *innerer Punkt* von X genannt, wenn es ein $\delta > 0$ derart gibt, daß jedes $x \in V$ mit $\|x - x_0\| < \delta$ zu X gehört.

2. Jeder innere Punkt $x_0 \in X$ ist ein Häufungspunkt von X.

3. Die Menge X heißt *offen*, wenn jedes $x_0 \in X$ ein innerer Punkt von X ist.

4. Man nennt $\{x \in V \mid \|x - x_0\| < \delta\}$ die *offene Kugel* um $x_0 \in V$ mit Radius $\delta > 0$.

Konvergenz einer Abbildung. Sind $x_0 \in V$ ein Häufungspunkt von X, desweiteren $y_0 \in W$ sowie $f : X \to W$ eine Abbildung, dann gilt die Äquivalenz:

1. Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so daß für alle $x \in X$ mit $0 < \|x - x_0\| \leq \delta$ stets $\|f(x) - y_0\| \leq \varepsilon$ gilt.

2. Für jede beliebige Folge (x_k) in $X \setminus \{x_0\}$ mit $\lim_{k\to\infty} \|x_k - x_0\| = 0$ gilt stets $\lim_{k\to\infty} \|f(x_k) - y_0\| = 0$.

In diesem Falle sagt man, daß *f für x gegen x_0 gegen den Grenzwert y_0 konvergiert* und schreibt $\lim_{x\to x_0} \|f(x) - y_0\| = 0$.

3. Man beachte, daß die Konvergenzbedingungen weder davon abhängen, ob f im Punkt $x_0 \in V$ definiert ist oder nicht, das heißt, ob $x_0 \in X$ oder $x_0 \notin X$ gilt, noch vom Wert $f(x_0) \in W$ im Falle $x_0 \in X$ abhängen.

Stetigkeit einer Abbildung. Sei $f : X \to W$ eine Abbildung.

1. Man nennt *f in $x_0 \in X$ stetig*, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so daß für alle $x \in X$ mit $\|x - x_0\| \leq \delta$ stets $\|f(x) - f(x_0)\| \leq \varepsilon$ gilt.

2. Die Abbildung f ist genau dann in einem Häufungspunkt $x_0 \in X$ von X stetig, wenn $\lim_{x\to x_0} \|f(x) - f(x_0)\| = 0$ gilt.

3. Ist $x_0 \in X$ ein isolierter Punkt, also kein Häufungspunkt von X, dann ist jede Abbildung $f : X \to W$ stetig in $x_0 \in X$.

4. Man nennt *$f : X \to W$ stetig*, wenn f in jedem Punkt $x_0 \in X$ stetig ist.

Stetigkeit der Verkettung. Sei Y eine Teilmenge von W.

1. Ist $f : X \to W$ eine in $x_0 \in X$ stetige Abbildung mit $f[X] \subset Y$ und $g : Y \to U$ eine in $f(x_0) \in Y$ stetige Abbildung, so ist $g \circ f : X \to U$ in $x_0 \in X$ stetig.

2. Sei $f : X \to Y$ eine bijektive Abbildung. Sind $f : X \to Y$ und die Inverse $f^{-1} : Y \to X$ stetig, so nennt man f einen *Homöomorphismus von X auf Y*.

(Einfach) zusammenhängende Mengen. 1. Man bezeichnet eine Menge $X \subset V$ als *zusammenhängend*, wenn für alle $x, \xi \in X$ eine stetige Abbildung $\varphi : [0,1] \to X$ existiert, so daß $\varphi(0) = x$ und $\varphi(1) = \xi$ gilt.

2. Eine zusammenhängende Menge $X \subset V$ heißt *einfach zusammenhängend*, wenn für jede stetige Abbildung $\varphi : \{u \in V \mid \|u\| = 1\} \to X$ eine stetige Fortsetzung $\psi : \{u \in V \mid \|u\| \leq 1\} \to X$ von φ existiert.

3. Die Kugel $\{x \in V \mid \|x - x_0\| \leq r\}$ um $x_0 \in V$ mit $r > 0$ ist einfach zusammenhängend. Die Hohlkugel $\{x \in V \mid \rho \leq \|x - x_0\| \leq r\}$ um $x_0 \in V$ mit dem inneren Radius $\rho > 0$ und dem äußeren Radius $r > \rho$ ist (*nicht* einfach) zusammenhängend.

Stetige Bilder zusammenhängender Mengen. Ist die Menge $X \subset V$ (einfach) zusammenhängend und $f : X \to W$ eine stetige Abbildung, dann ist auch die Bildmenge $f[X] \subset W$ (einfach) zusammenhängend.

Stetige Bilder abgeschlossener beschränkter Mengen. Ist $X \subset V$ eine abgeschlossene beschränkte Menge und $f : X \to W$ eine stetige Abbildung, dann gilt:

1. Die Bildmenge $f[X] \subset W$ ist ebenfalls beschränkt und abgeschlossen.
2. Im Falle $W = \mathbb{R}$ besitzt die Bildmenge $f[X] \subset \mathbb{R}$ Maximum und Minimum.
3. Die Abbildung f ist *gleichmäßig stetig:* Es gibt für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß für alle $x, x_0 \in X$ mit $\|x - x_0\| \leq \delta$ stets $\|f(x) - f(x_0)\| \leq \varepsilon$ gilt.

Stetigkeit der Koordinatenabbildung. Sei $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis des linearen normierten Raums V. Dann sind die Koordinatenabbildung $\Phi_B \in L(V; \mathbb{R}^n)$ sowie deren Inverse $\Phi_B^{-1} \in L(\mathbb{R}^n; V)$ stetig, und es gibt Konstanten $c, d > 0$, so daß

$$\|\Phi_B(u)\| \leq c\|u\| \quad \text{für alle } u \in V, \quad \|\Phi_B^{-1}(x)\| \leq d\|x\| \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \text{ gilt.}$$

Stetigkeit multilinearer Abbildungen. 1. Sei für jedes $k \in \{1, \ldots, r\}$ ein linearer normierter Raum V_k mit einer Basis $B_k = \{v_{k1}, \ldots, v_{kn_k}\}$ vorgegeben sowie $c_k > 0$ eine Konstante, so daß $\|\Phi_{B_k}(u_k)\| \leq c_k\|u_k\|$ für alle $u_k \in V_k$ gilt.

Für r-lineare Abbildungen $F : V_1 \times \cdots \times V_r \to W$ und $(u_1, \ldots, u_r) \in V_1 \times \cdots \times V_r$ mit den Koordinaten $(x_1, \ldots, x_r) = \big(\Phi_{B_1}(u_1), \ldots, \Phi_{B_r}(u_r)\big) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{n_r}$ liefert die Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} \|F(u_1, \ldots, u_r)\| &\leq \sum_{\ell_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{\ell_r=1}^{n_r} |x_{1\ell_1}| \cdots |x_{r\ell_r}| \cdot \|F(v_{1\ell_1}, \ldots, v_{r\ell_r})\| \\ &\leq c_1 \cdots c_r \cdot \|u_1\| \cdots \|u_r\| \sum_{\ell_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{\ell_r=1}^{n_r} \|F(v_{1\ell_1}, \ldots, v_{r\ell_r})\|, \end{aligned}$$

woraus sich die Stetigkeit der r-linearen Abbildung $F : V_1 \times \cdots \times V_r \to W$ ergibt.

2. Im Raum der r-linearen Abbildungen $F : V_1 \times \cdots \times V_r \to W$ wird durch

$$\|F\| = \sup\big\{\|F(u_1, \ldots, u_r)\| \in \mathbb{R} \mid (u_1, \ldots, u_n) \in V_1 \times \cdots \times V_r,\ \|u_1\|, \ldots, \|u_r\| \leq 1\big\}$$

die Struktur eines linearen normierten Raums eingeführt.

3. Für $r = 1$ und $T \in L(V; W)$ gilt $\|T\| = \sup\big\{\|T(u)\| \in \mathbb{R} \mid u \in V,\ \|u\| \leq 1\big\}$.