Vorlesung 13

Differenzierbare Abbildungen

Sind V, W und U endlichdimensionale lineare normierte Räume, so werden verschiedene Ableitungsbegriffe für stetige Abbildungen $f : X \to W$ eingeführt, wobei der Definitionsbereich X von f stets eine offene Teilmenge von V ist.

Differenzierbarkeit einer Abbildung. Sei $f : X \to W$ eine stetige Abbildung.

1. Man nennt f *in* $x_0 \in X$ *differenzierbar*, wenn eine lineare Abbildung $Df(x_0) \in L(V;W)$ existiert, so daß

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - Df(x_0)(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0$$

gilt. In diesem Fall ist die Abbildung $Df(x_0) \in L(V;W)$ eindeutig bestimmt und wird *Ableitung von* f *in* $x_0 \in X$ genannt. Desweiteren wird

$$Df(x_0)(v) = \lim_{\delta \to 0} \frac{f(x_0 + \delta v) - f(x_0)}{\delta} \in W$$

als *Richtungsableitung von* f *in* x_0 *in Richtung* $v \in V$ bezeichnet.

2. Die Abbildung $f : X \to W$ heißt *differenzierbar,* wenn sie in jedem Punkt $x_0 \in X$ differenzierbar ist. Diejenige Abbildung $Df : X \to L(V;W)$, welche jedem $x_0 \in X$ die Ableitung $Df(x_0) \in L(V;W)$ zuordnet, wird *Ableitung von* f genannt. Ist diese Abbildung $Df : X \to L(V;W)$ sogar stetig, so heißt f *stetig differenzierbar*.

Linearisierung. Ist die Abbildung $f : X \to W$ in $x_0 \in X$ differenzierbar, dann erhält man für die durch die Vorschrift $h(x) = f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0)$ für $x \in V$ definierte *Linearisierung* $h : V \to W$ *von* f *in* $x_0 \in X$ die Grenzwertbeziehung

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x) - h(x)\|}{\|x - x_0\|} = \lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - Df(x_0)(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0$$

der *tangentialen Berührung* des Graphen $\{(x, f(x)) \in V \times W \mid x \in X\}$ von f und des Graphen $\{(x, h(x)) \in V \times W \mid x \in V\}$ von h im Punkt $(x_0, f(x_0)) \in X \times W$.

Differenzierbarkeit multilinearer Abbildungen. 1. Eine auf V konstante Abbildung $f : V \to W$ hat in jedem Punkt $u \in V$ die Ableitung $Df(u) = 0 \in L(V;W)$.

2. Für jede Abbildung $T \in L(V;W)$ und jedes $u \in V$ gilt $DT(u) = T \in L(V;W)$.

3. Seien $V_1, \ldots, V_r$ endlichdimensionale lineare normierte Räume. Eine r-lineare Abbildung $F : V_1 \times \cdots \times V_r \to W$ ist in jedem Punkt $(u_1, \ldots, u_r) \in V_1 \times \cdots \times V_r$ differenzierbar, wobei die Ableitung $DF(u_1, \ldots, u_r) \in L(V_1 \times \cdots \times V_r; W)$ durch

$$DF(u_1, \ldots, u_r)(v_1, \ldots, v_r) = \sum_{\ell=1}^{r} F(u_1, \ldots, u_{\ell-1}, v_\ell, u_{\ell+1}, \ldots, u_r) \in W$$

für alle $(v_1, \ldots, v_r) \in V_1 \times \cdots \times V_r$ gegeben ist.

Linearität der Ableitung. Sind die Abbildungen $f_1,\ f_2 : X \to W$ in $x_0 \in X$ differenzierbar, dann ist die Linearkombination $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 : X \to W$ für alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar, und es gilt

$$D(\lambda_1 f_1 + \lambda_1 f_2)(x_0) = \lambda_1 Df_1(x_0) + \lambda_2 Df_2(x_0) \in L(V; W).$$

Kettenregel. Seien $f : X \to W$ eine in $x_0 \in X$ differenzierbare Abbildung, Y eine offene Teilmenge von W mit $f[X] \subset Y$ und $g : Y \to U$ eine in $y_0 = f(x_0) \in Y$ differenzierbare Abbildung. Dann ist die Verkettung $g \circ f : X \to U$ in $x_0 \in X$ differenzierbar, und es gilt

$$D(g \circ f)(x_0) = Dg(f(x_0))Df(x_0) \in L(V; U).$$

Ableitung der Verkettungsabbildung. Ist $F : L(V; W) \times L(W; U) \to L(V; U)$ diejenige Abbildung, welche jedem Paar $(T, S) \in L(V; W) \times L(W; U)$ ihre Verkettung $F(T, S) = ST \in L(V; U)$ zuordnet, so ist F in jedem $(T_0, S_0) \in L(V; W) \times L(W; U)$ differenzierbar, und für alle $(T, S) \in L(V; W) \times L(W; U)$ gilt

$$DF(T_0, S_0)(T, S) = S_0 T + S T_0 \in L(V; U).$$

Ableitung der inversen Abbildung. Sei $f : X \to Y$ eine bijektive Abbildung, welche die in V offene Teilmenge X auf die in W offene Teilmenge Y abbildet, wobei sowohl $f : X \to Y$ als auch die inverse Abbildung $f^{-1} : Y \to X$ stetig sind. Ist $f : X \to Y$ in $x_0 \in X$ differenzierbar und die Ableitung $Df(x_0) \in L(V; W)$ ein Isomorphismus von V auf W, dann ist auch die inverse Abbildung $f^{-1} : Y \to X$ in $y_0 = f(x_0) \in Y$ differenzierbar, und ihre Ableitung

$$D(f^{-1})(f(x_0)) = (Df(x_0))^{-1} \in L(W; V)$$

ist die zu $Df(x_0) \in L(V; W)$ inverse Abbildung.

Ableitung der Inversionsabbildung. 1. Die Menge $I(V; W)$ aller Isomorphismen $T \in L(V; W)$ von V auf W ist offen in $L(V; W)$.

2. Ist $M : I(V; W) \to I(W; V)$ diejenige Abbildung, welche jedem Isomorphismus $T \in I(V; W)$ den inversen Isomorphimus $M(T) = T^{-1} \in I(W; V)$ zuordnet, so ist M in jedem Punkt $T_0 \in I(V; W)$ differenzierbar, und für alle $T \in L(V; W)$ gilt

$$DM(T_0)(T) = -T_0^{-1} T T_0^{-1} \in L(W; V).$$

Mittelwertsatz. Seien $x, \xi \in X$ zwei verschiedene Punkte, so daß die abgeschlossene Strecke $S = \{(1 - \theta)x + \theta\xi \in V \mid \theta \in [0, 1]\}$ in der offenen Menge $X \subset V$ enthalten ist. Dann gilt für jede differenzierbare Funktion $f : X \to W$ die Abschätzung

$$\| f(x) - f(\xi)\| \le \|x - \xi\| \sup_{z \in S} \|Df(z)\|.$$

Partielle Ableitungen. Sei der Raum $V = V_1 \times \cdots \times V_r$ als kartesisches Produkt linearer normierter Räume $V_1, \ldots, V_r$ gegeben.

1. Für jedes $\ell \in \{1, \ldots, r\}$ und $x \in X$ wird auf der in V_ℓ offenen Teilmenge

$$X_\ell(x) = \big\{\xi \in V_\ell \mid (x_1, \ldots, x_{\ell-1}, \xi, x_{\ell+1}, \ldots, x_r) \in X\big\}$$

die durch

$$h_\ell(\xi) = f(x_1, \ldots, x_{\ell-1}, \xi, x_{\ell+1}, \ldots, x_r) \quad \text{für } \xi \in X_\ell(x)$$

definierte *partielle Abbildung* $h_\ell : X_\ell(x) \to W$ betrachtet.

2. Man nennt $f : X \to W$ in $x \in X$ *nach der ℓ-ten Variablen differenzierbar,* wenn die partielle Abbildung $h_\ell : X_\ell(x) \to W$ in $x_\ell \in X_\ell(x)$ differenzierbar ist. In diesem Falle heißt $D_\ell f(x) = Dh_\ell(x_\ell) \in L(V_\ell; W)$ die *partielle Ableitung von f in $x \in X$ nach der ℓ-ten Variablen.*

3. Die Abbildung $f : X \to W$ ist genau dann stetig differenzierbar, wenn f in jedem Punkt $x \in X$ für jedes $\ell \in \{1, \ldots, r\}$ nach der ℓ-ten Variable differenzierbar und die partielle Ableitung $D_\ell f : X \to L(V_\ell; W)$ stetig ist. In diesem Falle gilt

$$Df(x)(v) = \sum_{\ell=1}^{r} D_\ell f(x)(v_\ell) \in W \quad \text{für alle } x \in X,\, v \in V.$$

4. Sei der Raum $W = W_1 \times \cdots \times W_s$ als kartesisches Produkt linearer normierter Räume $W_1, \ldots, W_s$ gegeben, ferner Y eine offene Teilmenge in W und $g : Y \to U$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Ist $f_k : X \to W_k$ für jedes $k \in \{1, \ldots, s\}$ eine stetig differenzierbare Abbildung, so daß $(f_1(x), \ldots, f_s(x)) \in Y$ für alle $x \in X$ gilt, dann ist die durch

$$h(x) = g(f_1(x), \ldots, f_s(x)) \quad \text{für } x \in X$$

definierte Abbildung $h : X \to U$ stetig differenzierbar, und es gilt

$$Dh(x) = \sum_{k=1}^{s} D_k g(f_1(x), \ldots, f_s(x)) Df_k(x) \in L(V; U) \quad \text{für alle } x \in X.$$

Funktionalmatrizen. 1. Sei $V = \mathbb{R}^n$ vorgegeben. Ist $f : X \to W$ eine differenzierbare Abbildung, so wird ihre partielle Ableitung $D_\ell f(x) \in W$ in $x \in X$ nach der ℓ-ten Variablen mit einem Vektor aus W identifiziert, und es gilt

$$Df(x)(\xi) = \sum_{\ell=1}^{n} D_\ell f(x)\, \xi_\ell \in W \quad \text{für alle } x \in X, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

2. Sei der Spezialfall $V = \mathbb{R}^n$ und $W = \mathbb{R}^m$ betrachtet. Sind die Funktionen $f_1, \ldots, f_m : X \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so ist die partielle Ableitung $D_\ell f_k(x) \in \mathbb{R}$ in $x \in X$ nach der ℓ-ten Variablen für jedes $k \in \{1, \ldots, m\}$ eine reelle Zahl, und es gilt

$$Df_k(x)(\xi) = \sum_{\ell=1}^{n} D_\ell f_k(x)\, \xi_\ell \in \mathbb{R} \quad \text{für alle } x \in X, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Definiert man die differenzierbare Abbildung $f : X \to \mathbb{R}^m$ für $x \in X$ durch

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix}, \quad \text{so folgt mit} \quad Df(x) = \begin{pmatrix} D_1 f_1(x) & \cdots & D_n f_1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ D_1 f_m(x) & \cdots & D_n f_m(x) \end{pmatrix}$$

die Darstellung der Ableitung $Df(x) \in L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ von f in $x \in X$ als *Funktionalmatrix* $(D_\ell f_k(x)) \in \mathbb{R}^{m \times n}$.