Vorlesung 14

Kurven und Flächen im Raume

Seien V, W und U lineare normierte Räume der Dimensionen $\dim V = m$ sowie $\dim W = \dim U = n$. Es werden Bedingungen formuliert, unter denen nichtlineare Gleichungen Lösungen besitzen bzw. Untermannigfaltigkeiten definieren.

Satz über implizite Funktionen. Seien eine offene Menge $M \subset V \times W$ vorgegeben sowie $g : M \to U$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Sei $(x_0, y_0) \in M$ ein Punkt derart, daß $g(x_0, y_0) = 0$ gilt und die partielle Ableitung $D_2 g(x_0, y_0) \in L(W; U)$ ein Isomorphismus von W auf U ist.

Dann existieren offene Mengen $X \subset V$ und $Y \subset W$ mit $(x_0, y_0) \in X \times Y \subset M$ und eine stetig differenzierbare Abbildung $f : X \to Y$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. Für alle $x \in X$ und $y \in Y$ gilt genau dann $g(x, y) = 0$, wenn $y = f(x)$ gilt.
2. Es gilt $Df(x) = -(D_2 g(x, f(x)))^{-1}(D_1 g(x, f(x)) \in L(V; W)$ für jedes $x \in X$.

Satz über den lokalen Diffeomorphismus. Seien $M \subset W$ eine offene Menge, desweiteren $g : M \to U$ eine stetig differenzierbare Abbildung sowie $y_0 \in M$ ein Punkt derart, daß die Ableitung $Dg(y_0) \in L(W; U)$ ein Isomorphismus von W auf U ist.

Dann existieren eine in W offene Menge Y sowie eine in U offene Menge Z mit $y_0 \in X$ und $g(y_0) \in Z$ sowie den folgenden Eigenschaften:

1. Die Einschränkung $g|Y : Y \to U$ bildet Y bijektiv auf Z ab.
2. Die inverse Abbildung $(g|Y)^{-1} : Z \to W$ ist stetig differenzierbar.
3. Es gilt $D(g^{-1})(g(y)) = (Dg(y))^{-1} \in L(U; W)$ für alle $y \in Y$.

Untermannigfaltigkeiten. Eine Teilmenge M von V heißt *n-dimensionale Untermannigfaltigkeit von V*, wenn für jeden Punkt $x_0 \in M$ eine (und somit jede) der folgenden drei äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

1. Es existieren eine offene Teilmenge X von V mit $x_0 \in X$ und eine stetig differenzierbare Abbildung $\Phi : X \to \mathbb{R}^m$ derart, daß $D\Phi(x_0) \in L(V; \mathbb{R}^m)$ ein Isomorphismus ist und $M \cap X = \big\{x \in X \mid \Phi_k(x) = 0 \text{ für } k \in \{n+1, \ldots, m\}\big\}$ gilt. Das Paar (X, Φ) heißt *lokale Karte von M nahe x_0*.

2. Es gibt offene Teilmengen Y von $\mathbb{R}^n$ mit $y_0 \in Y$ sowie X von V mit $x_0 \in X$ und eine stetig differenzierbare Abbildung $\Psi : Y \to V$ mit $\Psi(y_0) = x_0$ derart, daß Ψ ein Homöomorphismus von Y auf $M \cap X = \Psi[Y]$ und $D\Psi(y_0) \in L(\mathbb{R}^n; V)$ injektiv ist. Das Paar (Y, Ψ) wird *lokale Parametrisierung von M nahe x_0* genannt.

3. Es existiert eine offene Teilmenge X von V mit $x_0 \in X$ und eine stetig differenzierbare Abbildung $F : X \to \mathbb{R}^{m-n}$ derart, daß $DF(x_0) \in L(V; \mathbb{R}^{m-n})$ surjektiv ist und $M \cap X = \big\{x \in X \mid F(x) = 0\big\}$ gilt. Das Paar (X, F) heißt *lokale Darstellung von M nahe x_0 durch die Lösungen $x \in X$ der Gleichung $F(x) = 0$*.

Tangentialräume. Sei $M \subset V$ eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit von V.

1. Seien $x_0 \in M$ und $\gamma :]-1, 1[\to V$ eine stetig differenzierbare Abbildung derart, daß $\gamma(s) \in M$ für alle $s \in]-1, 1[$ sowie $\gamma(0) = x_0$ gilt. Dann nennt man die Ableitung $D\gamma(0) \in V$ einen *Tangentialvektor an* M *in* x_0.

2. Für $x_0 \in M$ bezeichnet man den n-dimensionalen linearen Teilraum $TM(x_0)$ von V aller Tangentialvektoren $v \in V$ an M in x_0 als *Tangentialraum an* M *in* x_0.

Darstellungen von Tangentialräumen. Seien $M \subset V$ eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit von V, so ergeben sich für den Tangentialraum an M in einem Punkt $x_0 \in M$ die folgenden Darstellungen:

1. Ist (X, Φ) eine lokale Karte von M nahe x_0, so gilt

$$TM(x_0) = \big\{v \in V \mid D\Phi_k(x_0)(v) = 0 \text{ für } k \in \{n+1, \dots, m\}\big\}.$$

2. Für jede lokale Parametrisierung (Y, Ψ) von M nahe $x_0 = \Psi(y_0)$ gilt

$$TM(x_0) = \big\{D\Psi(y_0)(w) \in V \mid w \in \mathbb{R}^n\big\} = \operatorname{lin}\big\{D_1\Psi(y_0), \dots, D_n\Psi(y_0)\big\}.$$

Somit ist $(\mathbb{R}^n, D\Psi(y_0))$ eine globale Parametrisierung von $TM(x_0)$. Die Tangentialvektoren $D_1\Psi(y_0), \dots, D_n\Psi(y_0)$ bilden eine Basis von $TM(x_0)$.

3. Stellt das Paar (X, F) eine lokale Darstellung von M nahe x_0 durch die Lösungen $x \in X$ der Gleichung $F(x) = 0$ dar, so ergibt sich

$$TM(x_0) = \big\{v \in V \mid DF(x_0)(v) = 0\big\}.$$

Das Paar $(V, DF(x_0))$ liefert eine globale Darstellung von $TM(x_0)$ durch die Lösungen $v \in V$ der Gleichung $DF(x_0)(v) = 0$. Im Falle $n = m - 1$ erhält man die Darstellung $TM(x_0) = \big\{v \in V \mid \langle DF(x_0), v\rangle = 0\big\}$ als Hyperebene in V mit Hilfe der Linearform $DF(x_0) \in L(V; \mathbb{R})$.

Graphen von Funktionen. Sei $Y \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : Y \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar.

1. Definiert man die stetig differenzierbare Abbildung $\Psi : Y \to \mathbb{R}^{n+1}$ durch

$$\Psi(y) = \begin{pmatrix} y \\ f(y) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \quad \text{für } y \in Y \text{, so ist } \; D\Psi(y) = \begin{pmatrix} E_n \\ Df(y) \end{pmatrix} \in L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^{n+1})$$

für jedes $y \in Y$ injektiv und Ψ ein Homöomorphismus von Y auf den Graphen $M = \Psi[Y]$ von f, der somit eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+1}$ mit der Parametrisierung (Y, Ψ) darstellt.

2. Man erhält als Tangentialraum an M in $x = \Psi(y) \in M$ den linearen Teilraum

$$TM(x) = \left\{ \begin{pmatrix} w \\ \langle Df(y), w\rangle \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid w \in \mathbb{R}^n \right\} \quad \text{von } \mathbb{R}^{n+1}.$$

Euklidische Sphären. 1. Man bezeichnet den Rand

$$S = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x-a\|^2 = r^2\}$$

der euklidischen Kugel $K = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x-a\|^2 \le r^2\}$ um $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit dem Radius $r > 0$ als *n-dimensionale Sphäre um a mit dem Radius r*.

2. Erklärt man durch $F(x) = \|x-a\|^2 - r^2$ für $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ die stetig differenzierbare Funktion $F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, so erhält man die Darstellung $S = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid F(x) = 0\}$. Da die Funktion F in jedem Punkt $x \in S$ die Ableitung $\langle DF(x), \xi\rangle = 2(x-a|\xi)$ in Richtung $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$ besitzt, folgt aus $x - a \ne 0$, daß $DF(x) \in L(\mathbb{R}^{n+1}; \mathbb{R})$ surjektiv und die Sphäre S somit eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+1}$ ist.

3. Der Tangentialraum an S in $x \in S$ ist die zu $x-a \ne 0$ orthogonale Hyperebene

$$TS(x) = \{\xi \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (x-a|\xi) = 0\}.$$

Parametrisierung durch Kugelkoordinaten. Sei $S = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x-a\|^2 = r^2\}$ die n-dimensionale Sphäre um $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit dem Radius $r > 0$.

1. Definiert man auf $Y = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y_1 \in \,]-\pi,\pi[,\ y_2,\dots,y_n \in \,]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\}$ eine stetig differenzierbare Abbildung $\Psi : Y \to \mathbb{R}^{n+1}$ durch

$$\begin{aligned}
\Psi_1(y) &= a_1 + r\cos y_1 \cos y_2 \cdots \cos y_{n-1}\cos y_n\\
\Psi_2(y) &= a_2 + r\sin y_1 \cos y_2 \cdots \cos y_{n-1}\cos y_n\\
&\ \vdots\\
\Psi_n(y) &= a_n + r\sin y_{n-1}\cos y_n\\
\Psi_{n+1}(y) &= a_{n+1} + r\sin y_n
\end{aligned}$$

für *sphärische Koordinaten* $y \in Y$, dann ist Ψ ein Homöomorphismus von Y auf $\Psi[Y] \subset S$ und $D\Psi(y) \in L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^{n+1})$ für jedes $y \in Y$ injektiv. Damit ist das Paar (Y, Ψ) eine lokale Parametrisierung von S nahe $x \in \Psi[Y]$.

2. Bildet man auf $Z = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y_1,\dots,y_{n-1} \in \,]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[,\ y_n \in \,]-\pi,\pi[,\}$ eine weitere stetig differenzierbare Abbildung $\Lambda : Z \to \mathbb{R}^{n+1}$ durch

$$\begin{aligned}
\Lambda_1(y) &= a_1 + r\sin y_1\\
\Lambda_2(y) &= a_2 + r\sin y_2\cos y_1\\
&\ \vdots\\
\Lambda_n(y) &= a_n + r\sin y_n\cos y_{n-1}\cdots\cos y_2\cos y_1\\
\Lambda_{n+1}(y) &= a_{n+1} + r\cos y_n\cos y_{n-1}\cdots\cos y_2\cos y_1
\end{aligned}$$

für *sphärische Koordinaten* $y \in Z$, dann ist Λ ein Homöomorphismus von Z auf $\Lambda[Z] \subset S$ und $D\Lambda(y) \in L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^{n+1})$ für jedes $y \in Z$ injektiv. Damit ist das Paar (Z, Λ) eine lokale Parametrisierung von S nahe $x \in \Lambda[Z]$.