Vorlesung 15

Extremwertprobleme

Seien V und W endlichdimensionale lineare normierte Räume und X eine offene Teilmenge von V.

Zweimal differenzierbare Abbildungen. Sei $f : X \to W$ stetig differenzierbar.

1. Man nennt f in $x_0 \in X$ *zweimal differenzierbar,* wenn die stetige Abbildung $Df : X \to L(V;W)$ in x_0 differenzierbar ist. In diesem Falle bezeichnet man die Ableitung von Df in x_0 als *zweite Ableitung* $D^2 f(x_0) \in L(V; L(V;W))$ *von* f *in* x_0.

2. Da jede Abbildung $G \in L(V; L(V;W))$ mittels $F(v_1, v_2) = G(v_1)(v_2) \in W$ für $v_1, v_2 \in V$ mit einer bilinearen Abbildung $F : V \times V \to W$ identifiziert werden kann, wird die zweite Ableitung $D^2 f(x_0) \in L_2(V;W)$ einer in $x_0 \in X$ zweimal differenzierbaren Abbildung f fortan als ein Element des linearen Raumes $L_2(V;W)$ aller bilinearen Abbildungen $F : V \times V \to W$ angesehen.

3. Sei f in $x_0 \in X$ zweimal differenzierbar. Definiert man für vorgegebenes $v_2 \in V$ die Abbildung $h : X \to W$ durch $h(x) = Df(x)(v_2)$ für $x \in X$, dann besitzt h in x_0 die durch $Dh(x_0)(v_1) = D^2 f(x_0)(v_1, v_2)$ für $v_1 \in V$ gegebene Ableitung.

4. Die Abbildung $f : X \to W$ heißt *zweimal differenzierbar,* wenn sie in jedem Punkt $x_0 \in X$ zweimal differenzierbar ist. Jene Abbildung $D^2 f : X \to L_2(V;W)$, welche jedem $x_0 \in X$ die zweite Ableitung $D^2 f(x_0) \in L_2(V;W)$ zuordnet, wird *zweite Ableitung von* f genannt. Ist diese Abbildung $D^2 f : X \to L_2(V;W)$ stetig, so heißt f *zweimal stetig differenzierbar*.

Zweite partielle Ableitungen. Sei $f : X \to W$ in $x_0 \in X$ zweimal differenzierbar.

1. Die bilineare Abbildung $D^2 f(x_0) : V \times V \to W$ ist symmetrisch, es gilt also

$$D^2 f(x_0)(v_1, v_2) = D^2 f(x_0)(v_2, v_1) \in W \quad \text{für alle } v_1, v_2 \in V.$$

2. Im Spezialfall $V = \mathbb{R}^n$ ist die partielle Ableitung $D_\ell f : X \to W$ für jedes $\ell \in \{1, \dots, n\}$ in x_0 differenzierbar, und es gelten die Beziehungen

$$D_k D_\ell f(x_0) = D_\ell D_k f(x_0) \in W \quad \text{für alle } k, \ell \in \{1, \dots, n\},$$

$$D^2 f(x_0)(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n D_k D_\ell f(x_0)\, \xi_k \eta_\ell \in W \quad \text{für alle } \xi, \eta \in \mathbb{R}^n.$$

Gilt außerdem $W = \mathbb{R}$, so heißt $(D_k D_\ell f(x_0)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *Hesse-Matrix von* f *in* x_0.

3. Im Falle $V = \mathbb{R}^n$ ist die Abbildung $f : X \to W$ genau dann zweimal stetig differenzierbar, wenn f in jedem $x \in X$ für jedes $\ell \in \{1, \dots, n\}$ nach der ℓ-ten Variablen differenzierbar ist, die partiellen Ableitungen $D_\ell f : X \to W$ in jedem $x \in X$ für alle $k, \ell \in \{1, \dots, n\}$ nach der k-ten Variablen differenzierbar sind und dabei die zweiten partiellen Ableitungen $D_k D_\ell f : X \to W$ stetig sind.

Seien V und W euklidische Räume der Dimension $\dim V = n$ bzw. $\dim W = r \le n$, ferner X eine offene Teilmenge von V sowie $f : X \to \mathbb{R}$ eine Funktion, deren lokale Extrempunkte $x_0 \in X$ gesucht werden sowie $g : X \to W$ eine Funktion, welche dabei zu beachtende Nebenbedingungen $x_0 \in M$ für $M = \{x \in X \mid g(x) = 0\}$ beschreibt. Insbesondere sind im Falle $r = 0$ *keine* Nebenbedingungen zu berücksichtigen.

Lokale Extrempunkte. 1. Ein Punkt $x_0 \in X$ heißt *lokaler Minimumpunkt* (bzw. *Maximumpunkt*) *von f unter der Nebenbedingung $x_0 \in M$*, wenn es ein $\delta > 0$ gibt, so daß für alle $x \in M$ mit $\|x - x_0\| < \delta$ stets $f(x) \ge f(x_0)$ (bzw. $f(x) \le f(x_0)$) gilt.

2. Ein Punkt $x_0 \in X$ heißt *strenger lokaler Minimumpunkt* (bzw. *Maximumpunkt*) *von f unter der Nebenbedingung $x_0 \in M$*, wenn ein $\delta > 0$ existiert, so daß für alle $x \in M$ mit $0 < \|x - x_0\| < \delta$ stets $f(x) > f(x_0)$ (bzw. $f(x) < f(x_0)$) gilt.

Globale Extrempunkte. 1. Ein Punkt $x_0 \in X$ heißt *globaler Minimumpunkt* (bzw. *Maximumpunkt*) *von f unter der Nebenbedingung $x_0 \in M$*, wenn $f(x) \ge f(x_0)$ (bzw. $f(x) \le f(x_0)$) für alle $x \in M$ gilt.

2. Ein Punkt $x_0 \in X$ heißt *strenger globaler Minimumpunkt* (bzw. *Maximumpunkt*) *von f unter der Nebenbedingung $x_0 \in M$*, wenn $f(x) > f(x_0)$ (bzw. $f(x) < f(x_0)$) für alle $x \in M \setminus \{x_0\}$ gilt.

Notwendige Bedingungen für lokale Extrempunkte. Seien f und g stetig differenzierbar sowie $x_0 \in X$ ein Punkt, für den die Ableitung $Dg(x_0) \in L(V; W)$ surjektiv ist. Ist $x_0 \in X$ ein lokaler Extrempunkt von f unter der Nebenbedingung $x_0 \in M$, dann existiert ein *Lagrange-Multiplikator* $\Lambda \in L(W; \mathbb{R})$ mit

$$Df(x_0) - \Lambda Dg(x_0) = 0 \in L(V; \mathbb{R}).$$

Definitheit symmetrischer Bilinearformen. 1. Sei U ein linearer Teilraum von V der Dimension $\dim U = m$ und $F : U \times U \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform. Dann existiert ein symmetrischer Operator $T \in L(U; U)$ derart, daß

$$F(u_1, u_2) = (T(u_1)|u_2) \quad \text{für alle } u_1, u_2 \in U \text{ gilt.}$$

2. Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ die Eigenwerte des symmetrischen Operators $T \in L(U; U)$, wobei $\lambda_* = \min_{1 \le \ell \le m} \lambda_\ell$ der kleinste und $\lambda^* = \max_{1 \le \ell \le m} \lambda_\ell$ der größte Eigenwert von T sein soll, so gilt

$$\lambda_* \|u\|^2 \le F(u, u) = (T(u)|u) \le \lambda^* \|u\|^2 \quad \text{für alle } u \in U.$$

3. Die symmetrische Bilinearform $F : U \times U \to \mathbb{R}$ und der zugehörige symmetrische Operator $T \in L(U; U)$ heißen im Falle $\lambda_* > 0$ *positiv definit*, im Falle $\lambda^* < 0$ *negativ definit* und im Falle $\lambda_* < 0 < \lambda^*$ *indefinit*.

Hinreichende Bedingungen für strenge lokale Extrempunkte. Seien f und g zweimal stetig differenzierbar, desweiteren $x_0 \in X$ ein Punkt, für den die Ableitung $Dg(x_0) \in L(V;W)$ surjektiv ist sowie $\Lambda \in L(W;\mathbb{R})$ ein Lagrange-Multiplikator mit

$$Df(x_0) - \Lambda Dg(x_0) = 0 \in L(V;\mathbb{R}).$$

Sei ferner $U = \{v \in V \mid Dg(x_0)(v) = 0\}$ der $(n-r)$-dimensionale Kern der Ableitung $Dg(x_0) \in L(V;W)$ und $F : U \times U \to \mathbb{R}$ die durch

$$F(u_1,u_2) = D^2 f(x_0)(u_1,u_2) - \Lambda D^2 g(x_0)(u_1,u_2) \quad \text{für } u_1, u_2 \in U$$

definierte symmetrische Bilinearform. Dann gelten die folgenden Aussagen:

1. Ist F positiv (bzw. negativ) definit, so ist $x_0 \in X$ ein strenger lokaler Minimumpunkt (bzw. Maximumpunkt) von f unter der Nebenbedingung $x_0 \in M$.
2. Ist F indefinit, so ist $x_0 \in X$ *kein* lokaler Extrempunkt von f unter der Nebenbedingung $x_0 \in M$.