Vorlesung 16

Mehrdimensionale Integration

Es wird das System $\mathfrak{L}_n$ aller meßbaren Teilmengen E des euklidischen Raums $\mathbb{R}^n$ eingeführt, denen ein bzgl. isometrischen Abbildungen invariantes Maß sowie das Integral über eine integrierbare Funktion mit Werten im Körper $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ zugeordnet werden kann.

Inhalt von Quadern und deren Vereinigungen. 1. Eine Teilmenge $Q \subset \mathbb{R}^n$ wird als *halboffener Quader* bezeichnet, wenn es Intervallgrenzen $-\infty \leq a_1, \ldots, a_n < \infty$ sowie $-\infty < b_1, \ldots, b_n \leq \infty$ gibt, so daß $a_\ell \leq b_\ell$ für alle $\ell \in \{1, \ldots, n\}$ sowie

$$Q = [a_1, b_1[\times \cdots \times [a_n, b_n[\quad \text{gilt.}$$

Dabei wird $\mu_n(Q) = \prod_{\ell=1}^n (b_\ell - a_\ell)$ als *Inhalt von Q* definiert, wobei $\mu_n(Q) = 0$ gilt, falls Q (und damit mindestens ein Intervall $[a_\ell, b_\ell[$) leer ist.

2. Man bildet das Mengensystem $\mathfrak{A}_n$ aller Vereinigungen $E = \cup_{k=1}^m Q_k \subset \mathbb{R}^n$ beliebig vieler paarweise disjunkter Quader $Q_1, \ldots, Q_m \subset \mathbb{R}^n$ und definiert den *Inhalt von E* durch $\mu_n(E) = \sum_{k=1}^m \mu_n(Q_k)$.

Maß meßbarer Mengen. 1. Eine Folge (E_k) von Teilmengen $E_k \in \mathfrak{A}_n$ heißt *Überdeckung von $E \subset \mathbb{R}^n$ durch Quader*, wenn $E \subset \cup_{k=1}^\infty E_k$ gilt. Das *äußere Maß $\lambda_n^*(E)$ von $E \subset \mathbb{R}^n$* wird durch das Infimum über alle Summen $\sum_{k=1}^\infty \mu_n(E_k)$ erklärt, wobei als Folgen (E_k) alle Überdeckungen von E durch Quader zugelassen sind.

2. Um pathologische, *nicht* meßbare Teilmengen $E \subset \mathbb{R}^n$ auszuschließen, definiert man schließlich das Mengensystem $\mathfrak{L}_n$ aller *meßbaren* Teilmengen $E \subset \mathbb{R}^n$ durch

$$\mathfrak{L}_n = \left\{E \subset \mathbb{R}^n \mid \lambda_n^*(G) = \lambda_n^*(G \cap E) + \lambda_n^*(G \cap (\mathbb{R}^n \setminus E)) \text{ für alle } G \subset \mathbb{R}^n\right\}$$

sowie $\lambda_n(E) = \lambda_n^*(E)$ als das *Maß von $E \in \mathfrak{L}_n$*.

Eigenschaften meßbarer Mengen. Das Mengensystem $\mathfrak{A}_n$ ist in $\mathfrak{L}_n$ enthalten.

1. Für die leere Menge gilt $\varnothing \in \mathfrak{L}_n$.
2. Aus $E \in \mathfrak{L}_n$ folgt stets $\mathbb{R}^n \setminus E \in \mathfrak{L}_n$.
3. Für jede Folge (E_k) meßbarer Mengen $E_k \in \mathfrak{L}_n$ gilt $\cup_{k=1}^\infty E_k \in \mathfrak{L}_n$.

Eigenschaften des Maßes. Es gilt $\lambda_n(E) = \mu_n(E)$ für alle $E \in \mathfrak{A}_n$.

1. Es gilt $\lambda_n(\varnothing) = 0$ sowie $\lambda_n(E) \geq 0$ für alle $E \in \mathfrak{L}_n$.
2. Für alle $E, G \in \mathfrak{L}_n$ mit $E \subset G$ gilt $\lambda_n(E) \leq \lambda_n(G)$.
3. Aus $E \in \mathfrak{L}_n$, $\lambda_n(E) = 0$ und $E_0 \subset E$ folgt stets $E_0 \in \mathfrak{L}_n$ und $\lambda_n(E_0) = 0$.
4. Für jede Folge (E_k) paarweise disjunkter Mengen $E_k \in \mathfrak{L}_n$ gilt die Beziehung $\lambda_n\big(\cup_{k=1}^\infty E_k\big) = \sum_{k=1}^\infty \lambda_n(E_k)$.
5. Es gibt eine Zerlegung von $\mathbb{R}^n = \cup_{k=1}^\infty E_k$ in eine Folge (E_k) paarweise disjunkter Mengen $E_k \in \mathfrak{L}_n$ *endlichen* Maßes.

Einfache Funktionen. Sei $E \in \mathfrak{L}_n$ eine meßbare Menge. Man nennt eine Funktion $f : E \to \mathbb{K}$ *einfach*, wenn es eine Zerlegung von $E = \cup_{\ell=1}^{\infty} E_\ell$ in eine Folge (E_ℓ) paarweise disjunkter Mengen $E_\ell \in \mathfrak{L}_n$ endlichen Maßes und eine Folge (c_ℓ) von Zahlen $c_\ell \in \mathbb{K}$ gibt, so daß $f(x) = c_\ell$ für alle $x \in E_\ell$ und $\ell \in \mathbb{N}$ gilt.

Meßbare Funktionen. Seien $f, g : E \to \mathbb{K}$ Funktionen in $E \in \mathfrak{L}_n$.

1. Eine Eigenschaft ist für *fast alle* $x \in E$ erfüllt, wenn es eine Menge $E_0 \in \mathfrak{L}_n$ mit $\lambda_n(E_0) = 0$ gibt, so daß die Eigenschaft für *alle* $x \in E \setminus E_0$ gilt.
2. Gilt $f(x) = g(x)$ für fast alle $x \in E$, so heißen f und g *äquivalent*.
3. Die Funktion f wird *meßbar* genannt, wenn es eine Folge (f_k) einfacher Funktionen $f_k : E \to \mathbb{K}$ gibt, so daß $(f_k(x))$ für fast alle $x \in E$ gegen $f(x)$ konvergiert.

Integrierbare Funktionen. Sei $f : E \to \mathbb{K}$ eine Funktion in $E \in \mathfrak{L}_n$.

1. Eine einfache Funktion f wird als *integrierbar* bezeichnet, wenn es eine Zerlegung von $E = \cup_{\ell=1}^{\infty} E_\ell$ in eine Folge (E_ℓ) paarweise disjunkter Teilmengen $E_\ell \in \mathfrak{L}_n$ endlichen Maßes sowie eine Folge (c_ℓ) von Zahlen $c_\ell \in \mathbb{K}$ gibt, so daß $f(x) = c_\ell$ für alle $x \in E_\ell$ und $\ell \in \mathbb{N}$ gilt und die Reihe $\left(\sum_{\ell=1}^{m} c_\ell \, \lambda_n(E_\ell)\right)$ absolut konvergiert. In diesem Falle definiert man das *Integral über f* als Grenzwert

$$\int_E f(x)\, d\lambda_n(x) = \sum_{\ell=1}^{\infty} c_\ell \, \lambda_n(E_\ell) \in \mathbb{K}.$$

2. Eine meßbare Funktion f heißt *integrierbar*, wenn es eine Folge (f_k) integrierbarer einfacher Funktionen $f_k : E \to \mathbb{K}$ gibt, so daß $(f_k(x))$ für fast alle $x \in E$ gegen $f(x)$ konvergiert und für jedes $\varepsilon > 0$ ein $k_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so daß

$$\int_E |f_k(x) - f_\ell(x)|\, d\lambda_n(x) \le \varepsilon \quad \text{für alle } k, \ell \in \mathbb{N} \text{ mit } k, \ell \ge k_0 \text{ gilt.}$$

In diesem Falle definiert man das *Integral von f* als Grenzwert

$$\int_E f(x)\, d\lambda_n(x) = \lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\, d\lambda_n(x) \in \mathbb{K}.$$

Integral von Linearkombinationen. Sind $f, g : E \to \mathbb{K}$ integrierbare Funktionen in $E \in \mathfrak{L}_n$, so ist $\alpha f + \beta g : E \to \mathbb{K}$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ integrierbar, wobei

$$\int_E \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)\, d\lambda_n(x) = \alpha \int_E f(x)\, d\lambda_n(x) + \beta \int_E g(x)\, d\lambda_n(x).$$

Vergleichsprinzip. Sind $f : E \to \mathbb{K}$ und $g : E \to \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen in $E \in \mathfrak{L}_n$ und gilt $|f(x)| \le g(x)$ für fast alle $x \in E$, so erhält man

$$\left|\int_E f(x)\, d\lambda_n(x)\right| \le \int_E |f(x)|\, d\lambda_n(x) \le \int_E g(x)\, d\lambda_n(x).$$

Majorantenkriterium von Lebesgue. Seien $f : E \to \mathbb{K}$ eine meßbare Funktion sowie (f_k) eine Folge meßbarer Funktionen $f_k : E \to \mathbb{K}$ in $E \in \mathfrak{L}_n$, so daß $(f_k(x))$ für fast alle $x \in E$ gegen $f(x)$ konvergiert. Ist $g : E \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion, so daß $|f_k(x)| \leq g(x)$ für fast alle $x \in E$ und jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt, dann ist die Grenzfunktion $f : E \to \mathbb{K}$ integrierbar. In diesem Falle gilt

$$\lim_{k\to\infty} \int_E |f_k(x) - f(x)|\, d\lambda_n(x) = 0 \quad \text{und} \quad \int_E f(x)\, d\lambda_n(x) = \lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\, d\lambda_n(x).$$

Vertauschbarkeit von Grenzprozessen. Ist (f_k) eine Folge integrierbarer Funktionen $f_k : E \to \mathbb{K}$ derart, daß die Reihe $\left(\sum_{k=1}^m \int_E |f_k(x)|\, d\lambda_n(x)\right)$ konvergiert, dann gibt es eine integrierbare Grenzfunktion $f : E \to \mathbb{K}$, so daß die Reihe $\left(\sum_{k=1}^m f_k(x)\right)$ für fast alle $x \in E$ absolut gegen $f(x)$ konvergiert. In diesem Falle konvergiert die summandenweise integrierte Reihe $\left(\sum_{k=1}^m \int_E f_k(x)\, d\lambda_n(x)\right)$ gegen die Summe

$$\int_E f(x)\, d\lambda_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E f_k(x)\, d\lambda_n(x).$$

Stetige Abhängigkeit vom Parameter. Seien eine Teilmenge $X \subset \mathbb{K}$, ein Punkt $\xi_0 \in X$ sowie eine Funktion $f : E \times X \to \mathbb{K}$ gegeben, so daß für jedes $\xi \in X$ jeweils die durch $g_\xi(x) = f(x,\xi)$ für $x \in E$ definierte Funktion $g_\xi : E \to \mathbb{K}$ integrierbar und für fast alle $x \in E$ jeweils die durch $h_x(\xi) = f(x,\xi)$ für $\xi \in X$ erklärte Funktion $h_x : X \to \mathbb{K}$ in $\xi_0 \in X$ stetig ist.

Existiert eine integrierbare Funktion $g : E \to \mathbb{R}$ derart, daß $|f(x,\xi)| \leq g(x)$ für fast alle $x \in E$ und jedes $\xi \in X$ gilt, so ist die durch

$$h(\xi) = \int_E f(x,\xi)\, d\lambda_n(x) \quad \text{für } \xi \in X$$

definierte Funktion $h : X \to \mathbb{K}$ in ξ_0 stetig.

Differenzierbare Abhängigkeit vom Parameter. Seien ein Intervall $X \subset \mathbb{R}$ sowie eine Funktion $f : E \times X \to \mathbb{R}$ derart gegeben, daß für fast alle $x \in E$ jeweils die durch $h_x(\xi) = f(x,\xi)$ für $\xi \in X$ erklärte Funktion $h_x : X \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist.

Existiert eine integrierbare Funktion $g : E \to \mathbb{R}$ derart, daß $|D_2 f(x,\xi)| \leq g(x)$ für fast alle $x \in E$ und jedes $\xi \in X$ gilt, so wird durch

$$h(\xi) = \int_E f(x,\xi)\, d\lambda_n(x) \quad \text{für } \xi \in X$$

eine differenzierbare Funktion $h : X \to \mathbb{R}$ definiert, deren Ableitung die Gestalt

$$Dh(\xi) = \int_E D_2 f(x,\xi)\, d\lambda_n(x) \quad \text{für jedes } \xi \in X \text{ besitzt.}$$

Analytische Abhängigkeit vom Parameter. Seien eine offene Menge $U \subset \mathbb{C}$ sowie eine Funktion $f : E \times U \to \mathbb{C}$ derart gegeben, daß für fast alle $x \in E$ jeweils die durch $h_x(\xi) = f(x,\xi)$ für $\xi \in U$ erklärte Funktion $h_x : U \to \mathbb{R}$ analytisch ist.

Existiert eine integrierbare Funktion $g : E \to \mathbb{R}$ derart, daß $|f(x,\xi)| \leq g(x)$ für fast alle $x \in E$ und jedes $\xi \in U$ gilt, dann wird durch

$$h(\xi) = \int_E f(x,\xi)\, d\lambda_n(x) \quad \text{für } \xi \in U$$

eine analytische Funktion $h : U \to \mathbb{R}$ definiert, deren k-te Ableitung die Gestalt

$$D^k h(\xi) = \int_E D_2^k f(x,\xi)\, d\lambda_n(x) \quad \text{für jedes } \xi \in X \text{ und } k \in \mathbb{N} \text{ besitzt.}$$

Produktmaße. Seien $r, q \in \mathbb{N}$ mit $n = r + q$ und somit $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^q$ gegeben.

1. Für alle $G \in \mathfrak{L}_r$ und $H \in \mathfrak{L}_q$ gilt $G \times H \in \mathfrak{L}_n$ und $\lambda_n(G \times H) = \lambda_r(G)\, \lambda_q(H)$.
2. Für alle $E \in \mathfrak{L}_n$ und $x \in \mathbb{R}^r$ gilt $\big\{\xi \in \mathbb{R}^q \mid (x,\xi) \in E\big\} \in \mathfrak{L}_q$ sowie
$$\lambda_n(E) = \int_{\mathbb{R}^r} \lambda_q\big(\big\{\xi \in \mathbb{R}^q \mid (x,\xi) \in E\big\}\big)\, d\lambda_r(x).$$
3. Für alle $E \in \mathfrak{L}_n$ und $\xi \in \mathbb{R}^q$ gilt $\big\{x \in \mathbb{R}^r \mid (x,\xi) \in E\big\} \in \mathfrak{L}_r$ sowie
$$\lambda_n(E) = \int_{\mathbb{R}^q} \lambda_r\big(\big\{x \in \mathbb{R}^r \mid (x,\xi) \in E\big\}\big)\, d\lambda_q(\xi).$$

Vertauschbarkeit der Integration. Seien $r, q \in \mathbb{N}$ mit $n = r + q$ sowie $G \in \mathfrak{L}_r$ und $H \in \mathfrak{L}_q$ gegeben. Eine meßbare Funktion $f : G \times H \to \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, wenn das Integral

$$\int_{G \times H} |f(x,\xi)|\, d\lambda_n(x,\xi)$$

bzgl. des Produktmaßes oder eines der beiden mehrfachen Integrale

$$\int_G \left(\int_H |f(x,\xi)|\, d\lambda_q(\xi) \right) d\lambda_r(x) \quad \text{oder} \quad \int_H \left(\int_G |f(x,\xi)|\, d\lambda_r(x) \right) d\lambda_q(\xi)$$

konvergiert. In diesem Falle haben alle drei Integrale denselben Wert, und man erhält außerdem die Darstellung

$$\begin{aligned}\int_{G \times H} f(\xi,x)\, d\lambda_n(x,\xi) &= \int_G \left(\int_H f(x,\xi)\, d\lambda_q(\xi) \right) d\lambda_r(x) \\ &= \int_H \left(\int_G f(x,\xi)\, d\lambda_r(x) \right) d\lambda_q(\xi).\end{aligned}$$