Vorlesung 17

Integration längs Kurven und über Flächen

Es wird das System $\mathfrak{L}_M$ aller meßbaren Teilmengen E einer n-dimensionale Untermannigfaltigkeit M im euklidischen Raum $\mathbb{R}^m$ eingeführt, denen das Integral über eine integrierbare Funktion $f : E \to \mathbb{R}$ zugeordnet werden kann.

Sei $\big((Y_\ell, \Psi_\ell)\big)$ eine Folge lokaler Parametrisierungen von M mit $M = \cup_{\ell=1}^\infty \Psi_\ell[Y_\ell]$. Man bildet paarweise disjunkte Teilmengen $M_\ell = \Psi_\ell[Y_\ell] \setminus \cup_{j<\ell} \Psi_j[Y_j]$ für $\ell \in \mathbb{N}$ und erhält eine Zerlegung von $M = \cup_{\ell=1}^\infty M_\ell$ mit $M_\ell \subset \Psi_\ell[Y_\ell]$.

Meßbare Teilmengen. Man definiert das Mengensystem $\mathfrak{L}_M$ aller *meßbaren* Teilmengen E von M durch

$$\mathfrak{L}_M = \big\{E \subset M \mid \Psi_\ell^{-1}[E] \in \mathfrak{L}_n \text{ für jedes } \ell \in \mathbb{N}\big\}.$$

Eigenschaften meßbarer Mengen. 1. Für die leere Menge gilt $\varnothing \in \mathfrak{L}_M$.

2. Aus $E \in \mathfrak{L}_M$ folgt stets $M \setminus E \in \mathfrak{L}_M$.

3. Für jede Folge (E_ℓ) meßbarer Mengen $E_\ell \in \mathfrak{L}_M$ gilt $\cup_{\ell=1}^\infty E_\ell \in \mathfrak{L}_M$.

Maßverhältnis als Dichte. 1. Sei (Y, Ψ) eine lokale Parametrisierung von M nahe $x = \Psi(y) \in M$ und der Würfel $Q_\delta = [y_1, y_1 + \delta[\times \cdots \times [y_n, y_n + \delta[$ für $\delta > 0$ in Y enthalten. Approximiert man das vermeintliche Maß $\lambda_M(\Psi[Q_\delta])$ der Bildmenge $\Psi[Q_\delta]$ durch den Inhalt des Spats, der durch die (skalierten) Tangentialvektoren

$$\delta D_1\Psi(y), \ldots, \delta D_n\Psi(y) \in TM(x)$$

aufgespannt wird, so erwartet man im Grenzprozeß $\delta \downarrow 0$ das Maßverhältnis

$$\lim_{\delta\downarrow 0} \frac{\lambda_M(\Psi[Q_\delta])}{\lambda_n(Q_\delta)} = \lim_{\delta\downarrow 0} \frac{\sqrt{\det G(\delta D_1\Psi(y), \ldots, \delta D_n\Psi(y))}}{\sqrt{\det G(\delta e_1, \ldots \delta e_n)}} = \sqrt{\det D\Psi(y)^\intercal D\Psi(y)},$$

welches somit als Dichte in der Definition des *Maßes*

$$\lambda_M(E) = \int_{\Psi^{-1}[E]} \sqrt{\det D\Psi(y)^\intercal D\Psi(y)}\, d\lambda_n(y)$$

einer meßbaren Teilmenge $E \in \mathfrak{L}_M$ mit $E \subset \Psi[Y]$ eingesetzt wird.

2. Man definiert $\lambda_M(E) = \sum_{\ell=1}^\infty \lambda_M(E \cap M_\ell)$ als *Maß* einer Menge $E \in \mathfrak{L}_M$.

Eigenschaften des Maßes. 1. Es gilt $\lambda_M(\varnothing) = 0$ sowie $\lambda_M(E) \geq 0$ für $E \in \mathfrak{L}_M$.

2. Für alle $E, G \in \mathfrak{L}_M$ mit $E \subset G$ gilt $\lambda_M(E) \leq \lambda_M(G)$.

3. Aus $E \in \mathfrak{L}_M$, $\lambda_M(E) = 0$ und $E_0 \subset E$ folgt stets $E_0 \in \mathfrak{L}_M$ und $\lambda_M(E_0) = 0$.

4. Für jede Folge (E_ℓ) paarweise disjunkter Mengen $E_\ell \in \mathfrak{L}_M$ gilt die Beziehung $\lambda_M\big(\cup_{\ell=1}^\infty E_\ell\big) = \sum_{\ell=1}^\infty \lambda_M(E_\ell)$.

5. Es gibt eine Zerlegung von $M = \cup_{\ell=1}^\infty E_\ell$ in eine Folge (E_ℓ) paarweise disjunkter Mengen $E_\ell \in \mathfrak{L}_M$ *endlichen* Maßes.

Meßbare Funktionen. Seien $f, g : E \to \mathbb{R}$ Funktionen in $E \in \mathfrak{L}_M$.

1. Gilt $\{x \in E \mid f(x) \leq c\} \in \mathfrak{L}_M$ für alle $c \in \mathbb{R}$, so heißt f *meßbar*.
2. Eine Eigenschaft ist für *fast alle* $x \in E$ erfüllt, wenn es eine Menge $E_0 \in \mathfrak{L}_M$ mit $\lambda_M(E_0) = 0$ gibt, so daß die Eigenschaft für *alle* $x \in E \setminus E_0$ gilt.
3. Gilt $f(x) = g(x)$ für fast alle $x \in E$, so heißen f und g *äquivalent*.

Integrierbare Funktionen. 1. Sei (Y, Ψ) eine lokale Parametrisierung von M nahe $x \in M$. Eine meßbare Funktion $f : E \to \mathbb{R}$ in $E \in \mathfrak{L}_M$ mit $E \subset \Psi[Y]$ heißt *integrierbar,* wenn die durch

$$g(y) = f(\Psi(y))\sqrt{\det D\Psi(y)^\intercal D\Psi(y)} \quad \text{für } y \in \Psi^{-1}[E]$$

definierte meßbare Funktion $g : \Psi^{-1}[E] \to \mathbb{R}$ integrierbar ist. In diesem Falle definiert man das *Integral über f* mit Hilfe der *Transformationsformel*

$$\int_E f(x)\, d\lambda_M(x) = \int_{\Psi^{-1}[E]} f(\Psi(y))\sqrt{\det D\Psi(y)^\intercal D\Psi(y)}\, d\lambda_n(y).$$

2. Eine meßbare Funktion $f : E \to \mathbb{R}$ in $E \in \mathfrak{L}_M$ heißt *integrierbar,* wenn die Reihe $\left(\sum_{\ell=1}^{m} \int_{E\cap M_\ell} |f(x)|\, d\lambda_M(x)\right)$ konvergiert. In diesem Falle definiert man das *Integral von f* als Summe

$$\int_E f(x)\, d\lambda_M(x) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \int_{E\cap M_\ell} f(x)\, d\lambda_M(x).$$

Integral von Linearkombinationen. Sind $f, g : E \to \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen in $E \in \mathfrak{L}_M$, so ist $\alpha f + \beta g : E \to \mathbb{R}$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ integrierbar, wobei

$$\int_E \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)\, d\lambda_M(x) = \alpha \int_E f(x)\, d\lambda_M(x) + \beta \int_E g(x)\, d\lambda_M(x).$$

Vergleichsprinzip. Sind $f, g : E \to \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen in $E \in \mathfrak{L}_M$ und gilt $|f(x)| \leq g(x)$ für fast alle $x \in E$, so erhält man

$$\left|\int_E f(x)\, d\lambda_M(x)\right| \leq \int_E |f(x)|\, d\lambda_M(x) \leq \int_E g(x)\, d\lambda_M(x).$$

Majorantenkriterium von Lebesgue. Sei $f : E \to \mathbb{R}$ eine meßbare Funktion sowie (f_k) eine Folge meßbarer Funktionen $f_k : E \to \mathbb{R}$ in $E \in \mathfrak{L}_M$, so daß $(f_k(x))$ für fast alle $x \in E$ gegen $f(x)$ konvergiert. Ist $g : E \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion, so daß $|f_k(x)| \leq g(x)$ für fast alle $x \in E$ und jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt, dann ist die Grenzfunktion $f : E \to \mathbb{R}$ integrierbar. In diesem Falle gilt

$$\lim_{k\to\infty} \int_E |f_k(x) - f(x)|\, d\lambda_M(x) = 0 \quad \text{und} \quad \int_E f(x)\, d\lambda_M(x) = \lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\, d\lambda_M(x).$$

Invarianz des Maßes gegenüber Isometrien. Sei $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ eine isometrische Abbildung, das heißt, es gelte $\|T(\xi) - T(x)\| = \|\xi - x\|$ für alle $\xi, x \in \mathbb{R}^m$.

1. Dann gibt es einen Verschiebungsvektor $x_0 \in \mathbb{R}^m$ und eine orthogonale Abbildung $A \in L(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^m)$, so daß $T(x) = x_0 + A(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^m$ gilt. Das Bild $T[M]$ ist eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^m$.
2. Für jede Menge $E \in \mathfrak{L}_M$ gilt $T[E] \in \mathfrak{L}_{T[M]}$ sowie $\lambda_{T[M]}(T[E]) = \lambda_M(E)$.

Länge einer Kurve. Sei (Y, Ψ) eine lokale Parametrisierung einer eindimensionalen Untermannigfaltigkeit M in $\mathbb{R}^m$. Dann hat jedes Kurvenstück $E \in \mathfrak{L}_M$ mit $E \subset \Psi[Y]$ die Länge

$$\lambda_M(E) = \int_{\Psi^{-1}[E]} \|D\Psi(y)\| \, d\lambda_1(y).$$

Flächeninhalt des Graphen einer Funktion. Sei $Y \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : Y \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Definiert man die Funktion $\Psi : Y \to \mathbb{R}^{n+1}$ durch

$$\Psi(y) = \begin{pmatrix} y \\ f(y) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \quad \text{für } y \in Y, \text{ so gilt } \; D\Psi(y) = \begin{pmatrix} E_n \\ Df(y) \end{pmatrix} \in L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^{n+1})$$

für jedes $y \in Y$. Ferner ist (Y, Ψ) eine Parametrisierung des Graphen $M = \Psi[Y]$ von f, und für jede Menge $E \in \mathfrak{L}_M$ gilt

$$\lambda_M(E) = \int_{\Psi^{-1}[E]} \sqrt{1 + \|D\Psi(y)\|^2} \, d\lambda_n(y).$$

Rauminhalt einer Kugel. Definiert man eine lokale Parametrisierung (Y, Ψ) einer Kugel $K = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\|^2 < r^2\}$ vom Radius $r > 0$ mittels *Kugelkoordinaten* durch

$$\Psi(y) = \begin{pmatrix} y_3 \cos y_2 \cos y_1 \\ y_3 \cos y_2 \sin y_1 \\ y_3 \sin y_2 \end{pmatrix} \qquad \text{für } y \in Y = \left]0, 2\pi\right[\times \left]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[\times \left]0, r\right[$$

so erhält man als Ableitung von $\Psi : Y \to \mathbb{R}^3$ die Funktionalmatrix

$$D\Psi(y) = \begin{pmatrix} -y_3 \cos y_2 \sin y_1 & -y_3 \sin y_2 \cos y_1 & \cos y_2 \cos y_1 \\ y_3 \cos y_2 \cos y_1 & -y_3 \sin y_2 \sin y_1 & \cos y_2 \sin y_1 \\ 0 & y_3 \cos y_2 & \sin y_2 \end{pmatrix} \in L(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$$

und somit $\sqrt{\det D\Psi(y)^\intercal D\Psi(y)} = y_3^2 \cos y_2$ für jedes $y \in Y$. Daher hat die Kugel K vom Radius $r > 0$ den Rauminhalt

$$\lambda_3(K) = \int_Y \sqrt{\det D\Psi(y)^\intercal D\Psi(y)} \, d\lambda_3(y) = \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^r y_3^2 \cos y_2 \, dy_3 \, dy_2 \, dy_1$$
$$= \frac{2\pi r^3}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos y_2 \, dy_2 = \frac{2\pi r^3}{3} \cdot 2 \sin \tfrac{\pi}{2} = \frac{4\pi r^3}{3}.$$