Vorlesung 18

Anfangswertprobleme erster Ordnung

Seien $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ein Anfangszustand eines Systems zum Anfangszeitpunkt $t_0 \in \mathbb{R}$, desweiteren $X \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge im Zustandsraum $\mathbb{R}^n$ mit $x_0 \in X$ sowie $T \subset \mathbb{R}$ ein offenes Zeitintervall mit $t_0 \in T$.

Eindeutige Lösbarkeit. Sei $f : T \times X \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung mit stetiger partieller Ableitung $D_2 f : T \times X \to L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$.

Dann existiert ein offenes Teilintervall S von T mit $t_0 \in S$ und eine stetig differenzierbare Lösung $u : S \to \mathbb{R}^n$ des *Anfangswertproblems erster Ordnung*

$$Du(t) = f(t, u(t)) \ \text{für alle } t \in S, \ \ u(t_0) = x_0,$$

welche auf dem Zeitintervall $S \subset T$ eindeutig bestimmt ist.

Lineare Anfangswertprobleme. Sei $A : T \to L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ eine stetige Funktion.

1. Alle stetig differenzierbaren Lösungen $v : S \to \mathbb{R}^n$ der Gleichung

$$Dv(t) = A(t)v(t) \ \text{für } t \in S \tag{H}$$

bilden einen linearen Raum V der Dimension $\dim V = n$.

2. Jede Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$ des Lösungsraums V wird als *Fundamentalsystem* der Gleichung (H) bezeichnet. Ein Fundamentalsystem $\{v_1, \dots, v_n\}$ von (H) heißt *Hauptfundamentalsystem* von (H), wenn die Funktion $v_k : S \to \mathbb{R}^n$ für jedes $k \in \{1, \dots, n\}$ jeweils die Lösung des *homogenen* Problems

$$Dv_k(t) = A(t)v_k(t) \ \text{für } t \in S, \ \ v_k(t_0) = e_k$$

ist. Man gruppiert diese Lösungen spaltenweise zur stetig differenzierbaren *Hauptfundamentalmatrix* $U = (v_1, \dots, v_n) : S \to L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ von (H), deren inverse Matrix $U^{-1} : S \to L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ ebenfalls stetig differenzierbar ist.

3. Für jedes $x_0 \in \mathbb{R}^n$ löst $v = Ux_0 : S \to \mathbb{R}^n$ das *homogene* Problem

$$Dv(t) = A(t)v(t) \ \text{für } t \in S, \ \ v(t_0) = x_0.$$

4. Ist $w : T \to \mathbb{R}^n$ eine stetige *Inhomogenität,* so erhält man mittels

$$u(t) = U(t)x_0 + U(t) \int_{t_0}^{t} U(s)^{-1} w(s)\, ds \ \text{für } t \in S$$

die stetig differenzierbare Lösung $u : S \to \mathbb{R}^n$ des *inhomogenen* Problems

$$Du(t) = A(t)u(t) + w(t) \ \text{für } t \in S, \ \ u(t_0) = x_0.$$

Eindimensionale lineare Anfangswertprobleme. Seien $a, w : T \to \mathbb{R}$ stetig.

1. Die stetig differenzierbare Lösung $v : S \to \mathbb{R}$ des *homogenen* Problems

$$Dv(t) = a(t)v(t) \ \text{ für alle } t \in S, \quad v(t_0) = x_0$$

mit *inhomogenem* Anfangswert besitzt die Gestalt

$$v(t) = x_0 \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds\right) \ \text{ für alle } t \in S.$$

2. Die stetig differenzierbare Lösung $v_0 : S \to \mathbb{R}$ des *inhomogenen* Problems

$$Dv_0(t) = a(t)v_0(t) + w(t) \ \text{ für alle } t \in S, \quad v_0(t_0) = 0$$

mit *homogenem* Anfangswert hat die Darstellung

$$v_0(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds\right) \int_{t_0}^{t} w(s) \exp\left(-\int_{t_0}^{s} a(\tau)\, d\tau\right) ds \ \text{ für alle } t \in S.$$

3. Die stetig differenzierbare Lösung $u : S \to \mathbb{R}$ des *inhomogenen* Problems

$$Du(t) = a(t)u(t) + w(t) \ \text{ für alle } t \in S, \quad u(t_0) = x_0$$

hat schließlich die Darstellung als Summe $u(t) = v(t) + v_0(t)$ für alle $t \in S$.

Stromkreis mit induktivem Widerstand. 1. An den Enden einer anfangs stromlosen elektrischen Leitung mit konstantem Ohmschen Widerstand $R > 0$ und konstanter Selbstinduktion $L > 0$ wird vom Zeitpunkt $t_0 = 0$ an eine stetig veränderliche Spannung $U : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ angelegt. Durch die Gegenspannung $-LDI(t)$ resultiert ein Spannungsabfall an der Versorgungsquelle $U(t)$, woraus sich für den Strom $I : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ das folgende Anfangswertproblem ergibt:

$$U(t) - LDI(t) = RI(t) \ \text{ für alle } t \geq 0, \quad I(0) = 0.$$

2. Die stetig differenzierbare Lösung $I : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ des *inhomogenen* Anfangswertproblems erster Ordnung

$$DI(t) = -\frac{RI(t)}{L} + \frac{U(t)}{L} \ \text{ für } t \geq 0, \quad I(0) = 0$$

hat für jedes $t \geq 0$ die Gestalt

$$\begin{aligned} I(t) &= \exp\left(-\int_0^t \frac{R}{L}\, ds\right) \int_0^t \frac{U(s)}{L} \exp\left(\int_0^s \frac{R}{L}\, d\tau\right) ds \\ &= \exp\left(-\frac{Rt}{L}\right) \int_0^t \frac{U(s)}{L} \exp\left(\frac{Rs}{L}\right) ds. \end{aligned}$$

3. Im Falle der Gleichspannung $U(t) = U_0 \in \mathbb{R}$ ergibt sich für $t \geq 0$ daraus

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{U_0}{L} \exp\left(-\frac{Rt}{L}\right) \int_0^t \exp\left(\frac{Rs}{L}\right) ds \\ &= \frac{U_0}{L} \exp\left(-\frac{Rt}{L}\right) \frac{L}{R} \left(\exp\left(\frac{Rt}{L}\right) - 1\right) = \frac{U_0}{R}\left(1 - \exp\left(-\frac{Rt}{L}\right)\right) \end{aligned}$$

für den Strom, der sich exponentiell dem Ohmschen Wert $\lim_{t\to\infty} I(t) = \frac{U_0}{R}$ nähert.

4. Im Falle einer reinen Wechselspannung $U(t) = U_0 \sin(\omega t + \varphi)$ mit der Amplitude $U_0 > 0$, der Frequenz $\omega > 0$ und der Anfangsphase $\varphi \in [0, 2\pi]$ erhält man für $t \geq 0$ zunächst den Wechselstrom

$$I(t) = \frac{U_0}{L} \exp\left(-\frac{Rt}{L}\right) \int_0^t \exp\left(\frac{Rs}{L}\right) \sin(\omega s + \varphi)\, ds.$$

Zweimalige teilweise Integration liefert

$$\begin{aligned} &\int_0^t \exp\left(\frac{Rs}{L}\right) \sin(\omega s + \varphi)\, ds \\ &\quad = L \exp\left(\frac{Rt}{L}\right) \frac{R \sin(\omega t + \varphi) - L\omega \cos(\omega t + \varphi)}{R^2 + L^2\omega^2} - L\, \frac{R \sin\varphi - L\omega \cos\varphi}{R^2 + L^2\omega^2} \end{aligned}$$

für das Integral. Führt man eine weitere Phase $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ durch

$$\cos\alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \quad \text{und} \quad \sin\alpha = \frac{L\omega}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}$$

sowie den verschobenen Spannungswert $U_1(t) = U_0 \sin(\omega t + \varphi - \alpha)$ für $t \geq 0$ ein, so ergibt sich für den Strom

$$I(t) = \frac{U_1(t)}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} - \frac{U_1(0)}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \exp\left(-\frac{Rt}{L}\right) \quad \text{für } t \geq 0.$$

Abgesehen vom exponentiell abklingenden zweiten Stromanteil handelt es sich um einen reinen Wechselstrom von gleicher Periode wie die Spannung, aber mit einer um den Winkel α zurückliegenden Phase. Die Größen $\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$ und $L\omega$ heißen *Scheinwiderstand* und *Blindwiderstand* des Stromkreises.