Vorlesung 19

Autonome Gleichungen erster Ordnung

Für beliebige lineare Abbildungen $A \in L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ sollen Lösungen $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ der autonomen homogenen Differentialgleichung $Dv(t) = Av(t)$ für $t \in \mathbb{R}$ mit Hilfe der Eigenwerte und der invarianten Teilräume von A untersucht werden.

Komplexe autonome Differentialgleichungen. Sei $A \in L(\mathbb{C}^n; \mathbb{C}^n)$ vorgegeben.

1. Die Zahl $\mu \in \mathbb{C}$ ist genau dann ein Eigenwert von A, wenn sie Lösung der charakteristischen Gleichung $\det(A - \mu E_n) = \mathbb{0}$ von A ist. Es existieren $q \in \{1, \ldots, n\}$ *paarweise verschiedene* Eigenwerte $\mu_1, \ldots, \mu_q \in \mathbb{C}$ von A mit den algebraischen Vielfachheiten $m_1, \ldots, m_q \in \{1, \ldots, n\}$, wobei $\sum_{\ell=1}^{q} m_\ell = n$ gilt und das charakteristische Polynom $\chi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ von A in ein Produkt zerfällt:

$$\chi(\mu) = \det(A - \mu E_n) = \prod_{\ell=1}^{q} (\mu_\ell - \mu)^{m_\ell} = (\mu_1 - \mu)^{m_1} \cdots (\mu_q - \mu)^{m_q} \quad \text{für } \mu \in \mathbb{C}.$$

2. Die Menge aller stetig differenzierbaren Lösungen $v : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ der *autonomen homogenen* Differentialgleichung

$$\text{(H)} \qquad Dv(t) = Av(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$

bilden einen linearen Raum V der Dimension $\dim V = n$ über dem Körper $\mathbb{C}$.

3. Zur Konstruktion eines Fundamentalsystems von (H), das heißt einer Basis

$$\big\{ v_{\ell r} \mid \ell \in \{1, \ldots, q\},\ r \in \{1, \ldots, m_\ell\} \big\}$$

des Lösungsraums V, werden für jedes $\ell \in \{1, \ldots, q\}$ alle Funktionen $v_{\ell r} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ der Gestalt

$$v_{\ell r}(t) = z_{\ell r}(t) \operatorname{Exp}(\mu_\ell t) \quad \text{für } t \in \mathbb{R}$$

mit Polynomen $z_{\ell r} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ höchstens $(r-1)$-ten Grades für $r \in \{1, \ldots, m_\ell\}$ untersucht, so daß die Funktion $v = \sum_{r=1}^{m_\ell} v_{\ell r} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ eine Lösung der Gleichung (H) ist. Dieser Ansatz führt auf ein verallgemeinertes Eigenwertproblem

$$\sum_{r=1}^{m_\ell} (A - \mu_\ell E_n)\, z_{\ell r}(t) = \sum_{r=1}^{m_\ell} D z_{\ell r}(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R},$$

das durch Koeffizientenvergleich bzgl. Termen gleicher Ordnung in t auf höchstens m_ℓ lineare Gleichungssysteme zur Bestimmung von m_ℓ linear unabhängigen Polynomen $z_{\ell 1}, \ldots, z_{\ell m_\ell}$ zurückgeführt werden kann.

Enthält der Kern der Abbildung $A - \mu_\ell E_n \in L(\mathbb{C}^n; \mathbb{C}^n)$ für $\ell \in \{1, \ldots, q\}$ die volle Anzahl von m_ℓ linear unabhängigen Eigenvektoren $z_{\ell 1}, \ldots, z_{\ell m_\ell} \in \mathbb{C}^n$, so kann man diese als Polynome nullter Ordnung für diesen Zweck heranziehen.

Reelle autonome Differentialgleichungen. Sei $A \in L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ vorgegeben sowie

$$\big\{v_{\ell r} \mid \ell \in \{1,\dots,q\},\ r \in \{1,\dots,m_\ell\}\big\}$$

das zuvor konstruierte *komplexwertige* Fundamentalsystem von (H). Darauf aufbauend soll ein *reellwertiges* Fundamentalsystem von (H) konstruiert werden:

1. Hat der Eigenwert $\mu = \mu_\ell \in \mathbb{C}$ von A für ein $\ell \in \{1,\dots,q\}$ den Imaginärteil $\operatorname{Im}\mu = 0$, dann gilt auch für jede Funktion $v \in \big\{v_{\ell 1},\dots,v_{\ell m_\ell}\big\}$ des komplexwertigen Fundamentalsystems von (H) stets $\operatorname{Im} v(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

2. Besitzt der Eigenwert $\mu = \mu_\ell \in \mathbb{C}$ von A für ein $\ell \in \{1,\dots,q\}$ den Realteil $\operatorname{Re}\mu = \alpha \in \mathbb{R}$ und den Imaginärteil $\operatorname{Im}\mu = \beta \neq 0$ und ist $z \in \mathbb{C}^n$ ein Eigenvektor zu μ, so folgt $A\overline{z} = \overline{\mu z}$ aus $Az = \mu z$, das heißt, auch $\overline{\mu} \in \mathbb{C}$ ist ein Eigenwert von A.

Da für jedes Polynom $z \in \big\{z_{\ell 1},\dots,z_{\ell m_\ell}\big\}$ die durch $v(t) = z(t)\operatorname{Exp}(\mu t)$ für $t \in \mathbb{R}$ definierte Funktion $v : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ eine Funktion des komplexwertigen Fundamentalsystems von (H) ist, folgt aus $Dv(t) = Av(t)$ auch $D\overline{v}(t) = A\overline{v}(t)$ für jedes $t \in \mathbb{R}$. Damit sind $v : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ und $\overline{v} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ linear unabhängige Lösungen von (H) mit

$$v(t) = z(t)\operatorname{Exp}(\mu t) \quad \text{und} \quad \overline{v}(t) = \overline{z}(t)\operatorname{Exp}(\overline{\mu} t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Sind $\operatorname{Re} z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ sowie $\operatorname{Im} z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ Real- und Imaginärteil von $z : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$, so folgt für den Realteil $\operatorname{Re} v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ und den Imaginärteil $\operatorname{Im} v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ von $v : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ für alle $t \in \mathbb{R}$ die Darstellung

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} v(t) &= \exp(\alpha t)\big(\operatorname{Re} z(t)\cdot\cos\beta t - \operatorname{Im} z(t)\cdot\sin\beta t\big),\\
\operatorname{Im} v(t) &= \exp(\alpha t)\big(\operatorname{Re} z(t)\cdot\sin\beta t + \operatorname{Im} z(t)\cdot\cos\beta t\big).
\end{aligned}$$

Somit kann man jedes Paar linear unabhängiger Lösungen $v, \overline{v} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ des komplexwertigen Fundamentalsystems von (H) jeweils durch das Paar linear unabhängiger Lösungen $\operatorname{Re} v, \operatorname{Im} v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ von (H) ersetzen und erhält insgesamt ein Fundamentalsystem $\{v_1,\dots,v_n\}$ reellwertiger Lösungen von (H) im Falle $A \in L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$.