Vorlesung 2

Lineare Räume

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper von Skalaren $\lambda \in \mathbb{K}$ sowie ferner A eine Menge von Indizes $\alpha \in A$.

Lineare Räume. Eine Menge V von *Vektoren* $u \in V$ mit den beiden Abbildungen

Addition, die jedem Paar $(u, v) \in V \times V$ eine *Summe* $u + v \in V$ zuordnet,

Skalarmultiplikation, die jedem Paar $(\lambda, u) \in \mathbb{K} \times V$ das *Vielfache* $\lambda u \in V$ zuweist,

heißt *linearer Raum über* $\mathbb{K}$, wenn folgende Axiome erfüllt sind:

1.1. Für alle $u, v, w \in V$ gilt $(u + v) + w = u + (v + w)$.

1.2. Für alle $u, v \in V$ gilt $u + v = v + u$.

1.3. Es gibt einen *Nullvektor* $0 \in V$, so daß $u + 0 = u$ für alle $u \in V$ gilt.

1.4. Zu jedem $u \in V$ existiert ein $-u \in V$, so daß $u + (-u) = 0$ gilt.

2.1. Für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ und $u \in V$ gilt $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$.

2.2. Für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ und $u, v \in V$ gilt $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$.

2.3. Für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ und $u \in V$ gilt $\lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u$.

2.4. Für alle $u \in V$ gilt $\mathbb{1}u = u$.

Linearkombinationen. Sind $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subset \mathbb{K}$ sowie $\{u_1, \dots, u_n\} \subset V$ endliche Familien, dann bezeichnet man die Summe $\sum_{\ell=1}^{n} \lambda_\ell u_\ell \in V$ als *Linearkombination* der Vektoren aus $\{u_1, \dots, u_n\}$.

Lineare Teilräume. 1. Ist V ein linearer Raum, so versteht man unter einem *linearen Teilraum* von V eine Teilmenge U von V, so daß für alle $u_1, u_2 \in U$ sowie $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ stets die Beziehung $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 v_2 \in U$ gilt.

2. Die *trivialen Räume* $\{0\}$ und V sind lineare Teilräume von V.

3. Die Einschränkungen der Addition auf $U \times U$ sowie der skalaren Multiplikation auf $\mathbb{K} \times U$ bilden jeweils in U ab, das heißt, der lineare Teilraum U ist selbst ein linearer Raum über $\mathbb{K}$.

Lineare Hülle. 1. Ist $\{V_\alpha \mid \alpha \in A\}$ eine Familie linearer Teilräume von V, so ist auch deren *Durchschnitt* $\cap_{\alpha \in A} V_\alpha$ ein linearer Teilraum von V, nämlich der größte, in allen Teilräumen V_α enthaltene Teilraum von V.

2. Für jede Teilmenge E von V wird die *lineare Hülle* $\operatorname{lin} E$ von E als Durchschnitt sämtlicher linearer Teilräume U von V mit $E \subset U$ definiert, also als kleinster, die Menge E umfassender linearer Teilraum von V. Man spricht in diesem Falle davon, daß der lineare Teilraum $\operatorname{lin} E$ von der Teilmenge E *erzeugt* wird.

3. Die Menge aller Linearkombinationen endlicher Familien von Vektoren aus einer Teilmenge $E \subset V$ stimmt mit ihrer linearen Hülle $\operatorname{lin} E$ überein.

Summen linearer Teilräume. 1. Die lineare Hülle der Vereinigung $\cup_{\alpha\in A} V_\alpha$ einer Familie $\{V_\alpha \mid \alpha \in A\}$ linearer Teilräume von V nennt man deren *Summe* $\sum_{\alpha\in A} V_\alpha$.

2. Diese Summe $\sum_{\alpha\in A} V_\alpha$ heißt *direkt*, wenn für jeden Index $\beta \in A$ die Bedingung $V_\beta \cap \sum_{\alpha\in A,\,\alpha\neq\beta} V_\alpha = \{0\}$ erfüllt ist.

3. Man nennt zwei lineare Teilraüme V_1 und V_2 von V *komplementär*, wenn sich V als direkte Summe $V = V_1 + V_2$ darstellen läßt. In diesem Falle gilt $V_1 \cap V_2 = \{0\}$, das heißt, es existiert für jeden Vektor $v \in V$ eine *eindeutig* bestimmte Zerlegung in eine Summe $v = v_1 + v_2$ von Vektoren $v_1 \in V_1$ und $v_2 \in V_2$.

Lineare Unabhängigkeit. 1. Eine Familie $\{u_\alpha \mid \alpha \in A\}$ von Vektoren im linearen Raum V heißt *linear unabhängig*, wenn für jede endliche Teilfamilie $\{v_1, \ldots, v_n\}$ von $\{u_\alpha \mid \alpha \in A\}$ und alle $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ aus $\sum_{\ell=1}^n \lambda_\ell v_\ell = 0$ stets $\lambda_\ell = 0$ für alle $\ell \in \{1, \ldots, n\}$ folgt, das heißt, wenn die Summe $\sum_{\alpha\in A} \operatorname{lin}\{u_\alpha\}$ direkt ist.

2. Eine Familie $\{u_\alpha \mid \alpha \in A\}$ von Vektoren im linearen Raum V wird als *linear abhängig* bezeichnet, wenn sie *nicht* linear unabhängig ist, das heißt, wenn es einen Index $\beta \in A$ mit $u_\beta \in \sum_{\alpha\in A,\,\alpha\neq\beta} \operatorname{lin}\{u_\alpha\}$ gibt.

Basen. 1. Eine Familie $\{v_\alpha \mid \alpha \in A\}$ von Vektoren eines linearen Raumes V wird *Basis* von V genannt, wenn sie linear unabhängig ist und den Raum V erzeugt, das heißt, wenn $V = \sum_{\alpha\in A} \operatorname{lin}\{v_\alpha\}$ eine direkte Summe ist.

2. Sei V_1 ein linearer Teilraum des linearen Raums V und $\{u_1, \ldots, u_m\} \subset V$ eine Familie mit $V = V_1 + \sum_{\ell=1}^m \operatorname{lin}\{u_\ell\}$. Dann gibt es eine Teilfamilie $\{v_1, \ldots, v_n\}$ von $\{u_1, \ldots, u_m\}$, so daß $\{v_1, \ldots, v_n\}$ Basis eines linearen Teilraums $V_2 = \sum_{\ell=1}^n \operatorname{lin}\{v_\ell\}$ von V und $V = V_1 + V_2$ eine direkte Summe ist.

Dimension und Codimension. 1. Besitzt der lineare Raum V eine endliche Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$, so nennt man ihn *endlichdimensional*. Dann besteht jede Basis von V aus genau n Vektoren und $\dim V = n$ wird *Dimension* des linearen Raums V genannt. Ein linearer Raum, der nicht von endlicher Dimension ist, heißt *unendlichdimensional*.

2. Ist V ein linearer Raum der Dimension $\dim V = n$, dann enthält jede Familie $\{u_1, \ldots, u_m\}$, welche V erzeugt, eine Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ von V. Jede Familie $\{v_1, \ldots, v_n\}$, welche V erzeugt, ist eine Basis von V. Jede Familie $\{u_1, \ldots, u_m\} \subset V$ linear unabhängiger Vektoren ist in einer Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ von V enthalten. Jede Familie $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ linear unabhängiger Vektoren ist eine Basis von V.

3. Ein linearer Teilraum V_1 eines linearen Raumes V besitzt *endliche Codimension*, wenn es einen endlichdimensionalen linearen Teilraum V_2 von V gibt, für den die Summe $V = V_1 + V_2$ direkt ist. Die Dimension $\operatorname{codim} V_1 = \dim V_2$ heißt *Codimension* von V_1 in V. Existiert kein endlichdimensionaler linearer Teilraum V_2 von V, der komplementär zu V_1 in V ist, dann besitzt V_1 *unendliche Codimension*.

Dimension von Teilräumen. 1. Ist V ein endlichdimensionaler linearer Raum, so gilt $\dim V = \dim U + \operatorname{codim} U$ für jeden linearen Teilraum U von V.

2. Sind V_1 und V_2 endlichdimensionale lineare Teilräume eines linearen Raums V, dann gilt $\dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$.

3. Haben die beiden linearen Teilräume V_1 und V_2 eines linearen Raums V endliche Codimension, dann gilt $\operatorname{codim}(V_1 + V_2) + \operatorname{codim}(V_1 \cap V_2) = \operatorname{codim} V_1 + \operatorname{codim} V_2$.

Koordinatenräume. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ wird das n-fache kartesische Produkt $\mathbb{K}^n$ des Körpers $\mathbb{K}$ als n-dimensionaler linearer *Koordinatenraum* bezeichnet. Addition und skalare Multiplikation werden *koordinatenweise* erklärt:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \ \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix} \text{ für } \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n, \ \lambda \in \mathbb{K}.$$

Die *Standardbasis* $\{e_1, \dots, e_n\}$ in $\mathbb{K}^n$ hat die Gestalt

$$e_1 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} \\ \mathbb{0} \\ \vdots \\ \mathbb{0} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n, \ \dots, \ e_n = \begin{pmatrix} \mathbb{0} \\ \vdots \\ \mathbb{0} \\ \mathbb{1} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n.$$

Funktionenraum. Sei $X \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Auf der Menge V aller Funktionen $u : X \to \mathbb{R}$ wird die Struktur eines linearen Raums über $\mathbb{R}$ erklärt, indem mit der

Addition jedem Paar $(u, v) \in V \times V$ die durch $(u + v)(x) = u(x) + v(x)$ für $x \in X$ definierte *Summe* $u + v \in V$ zugewiesen wird,

Skalarmultiplikation jedem Paar $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times V$ das durch $(\lambda u)(x) = \lambda u(x)$ für $x \in X$ definierte *Vielfache* $\lambda u \in V$ zugeordnet wird.

Teilräume ganzer rationaler Funktionen. Seien $X \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, V der lineare Raum aller Funktionen $u : X \to \mathbb{R}$ sowie die Potenzfunktionen $u_\ell : X \to \mathbb{R}$ durch $u_\ell(x) = x^\ell$ für $x \in X$ und Exponenten $\ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ definiert. Mittels Koeffizientenvergleich erhält man folgende Aussagen:

1. Für $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ist der lineare Teilraum $U_n = \sum_{\ell=0}^{n} \operatorname{lin}\{u_\ell\}$ von V eine direkte Summe. Er besteht aus den durch $u(x) = \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell x^\ell$ für $x \in X$ definierten ganzen rationalen Funktionen $u : X \to \mathbb{R}$ *höchstens* n-ter Ordnung mit $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

2. Der lineare Teilraum $U = \sum_{\ell=0}^{\infty} \operatorname{lin}\{u_\ell\}$ von V ist eine direkte Summe. Er setzt sich aus den durch $u(x) = \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell x^\ell$ für $x \in X$ definierten ganzen rationalen Funktionen $u : X \to \mathbb{R}$ *beliebiger* Ordnung $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ mit $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ zusammen.

3. Da $U_n \subset U \subset V$ sowie $\dim U_n = n + 1$ für jedes $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gilt, sind U und V unendlichdimensionale lineare Räume.