Vorlesung 20

Anfangswertprobleme zweiter Ordnung

Seien $x_0,\ y_0 \in \mathbb{R}^n$ Zustände zum Zeitpunkt $t_0 \in \mathbb{R}$, desweiteren $X,\ Y \subset \mathbb{R}^n$ offene Mengen in $\mathbb{R}^n$ mit $x_0 \in X$ und $y_0 \in Y$ sowie $T \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall mit $t_0 \in T$.

Eindeutige Lösbarkeit. Sei $f : T \times X \times Y \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung mit stetigen partiellen Ableitungen $D_2 f,\ D_3 f : T \times X \times Y \to L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$.

Dann existiert ein offenes Teilintervall S von T mit $t_0 \in S$ und eine zweimal stetig differenzierbare Lösung $u : S \to \mathbb{R}^n$ des *Anfangswertproblems zweiter Ordnung*

$$D^2 u(t) = f(t, u(t), Du(t)) \ \text{ für alle } t \in S,\ \ u(t_0) = x_0,\ \ Du(t_0) = y_0,$$

welche auf dem Teilintervall $S \subset T$ eindeutig bestimmt ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn die stetig differenzierbare Funktion $\binom{u}{v} = \binom{u}{Du} : S \to \mathbb{R}^{2n}$ Lösung des *Anfangswertproblems erster Ordnung*

$$\begin{pmatrix} Du(t) \\ Dv(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(t) \\ f(t, u(t), v(t)) \end{pmatrix} \ \text{ für alle } t \in S,\ \ \begin{pmatrix} u(t_0) \\ v(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \ \text{ ist.}$$

Lineare Anfangswertprobleme. Seien $A,\ B : T \to L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ stetige Funktionen.

1. Alle zweimal stetig differenzierbaren Lösungen $v : S \to \mathbb{R}^n$ der Gleichung

$$\text{(H)} \qquad D^2 v(t) = B(t) Dv(t) + A(t) v(t) \ \text{ für } t \in S$$

bilden einen linearen Raum V der Dimension $\dim V = 2n$.

2. Jede Basis $\{v_1, \ldots, v_{2n}\}$ des Lösungsraums V heißt *Fundamentalsystem* von (H). Gilt für alle Indizes $k \in \{1, \ldots, n\}$ und $\ell \in \{n+1, \ldots, 2n\}$ außerdem noch

$$D^2 v_k(t) = B(t) Dv_k(t) + A(t) v_k(t) \ \text{ für } t \in S,\ \ v_k(t_0) = e_k,\ \ Dv_k(t_0) = 0,$$
$$D^2 v_\ell(t) = B(t) Dv_\ell(t) + A(t) v_\ell(t) \ \text{ für } t \in S,\ \ v_\ell(t_0) = 0,\ \ Dv_\ell(t_0) = e_{\ell-n},$$

so spricht man von einem *Hauptfundamentalsystem* von (H) und ordnet diese Lösungen spaltenweise als *Hauptfundamentalmatrix* $U = (v_1, \ldots, v_{2n}) : S \to L(\mathbb{R}^{2n};\mathbb{R}^n)$ an. Die *Wronski-Matrix* $W = \binom{U}{DU} : S \to L(\mathbb{R}^{2n};\mathbb{R}^{2n})$ von (H) und ihre Inverse $W^{-1} : S \to L(\mathbb{R}^{2n};\mathbb{R}^{2n})$ sind stetig differenzierbare Funktionen.

3. Für alle $x_0,\ y_0 \in \mathbb{R}^n$ löst $v = U\binom{x_0}{y_0} : S \to \mathbb{R}^n$ das *homogene* Problem

$$D^2 v(t) = B(t) Dv(t) + A(t) v(t) \ \text{ für } t \in S,\ \ v(t_0) = x_0,\ \ Dv(t_0) = y_0.$$

4. Ist $w : T \to \mathbb{R}^n$ eine stetige *Inhomogenität,* so erhält man vermöge

$$u(t) = U(t) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + U(t) \int_0^t W(s)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ w(s) \end{pmatrix} ds \ \text{ für } t \in S$$

die zweimal stetig differenzierbare Lösung $u : S \to \mathbb{R}^n$ des *inhomogenen* Problems

$$D^2 u(t) = B(t) Du(t) + A(t) u(t) + w(t) \ \text{ für } t \in S,\ \ u(t_0) = x_0,\ \ Du(t_0) = y_0.$$

Freie elastische Schwingungen. Das homogene Anfangswertproblem

$$mD^2u(t) + \alpha Du(t) + cu(t) = 0 \ \text{ für } t \in \mathbb{R}, \ \ u(0) = x_0, \ \ Du(0) = v_0$$

freier elastischer Schwingungen beschreibt kleine Ausschläge $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ einer Punktmasse $m > 0$ aus der Ruhelage unter der Wirkung einer Federkraft mit der Konstanten $c > 0$ und einer Dämpfungskraft mit der Konstanten $\alpha > 0$.

Mit den neuen Konstanten $\kappa = \frac{\alpha}{2m} > 0$ und $\omega > 0$ mit $\omega^2 = \frac{c}{m}$ ergibt sich

$$D^2u(t) + 2\kappa Du(t) + \omega^2 u(t) = 0 \ \text{ für } t \in \mathbb{R}, \ \ u(0) = x_0, \ \ Du(0) = v_0,$$

und der Ansatz $u(t) = z\,\mathrm{Exp}(\mu t)$ für $t \in \mathbb{R}$, eine komplexe Konstante $z \in \mathbb{C}$ und einen komplexen Exponenten $\mu \in \mathbb{C}$ liefert die charakteristische Gleichung

$$0 = \mu^2 + 2\mu\kappa + \omega^2 = (\mu + \kappa)^2 - (\kappa^2 - \omega^2) = (\mu + \kappa)^2 + (\omega^2 - \kappa^2).$$

Starke Dämpfung. Im Falle $\kappa > \omega$ erhält man für $\lambda = \sqrt{\kappa^2 - \omega^2} < \kappa$ zwei reelle Lösungen $\mu_1 = -\kappa + \lambda < 0$ sowie $\mu_2 = -\kappa - \lambda < 0$ der charakteristischen Gleichung und somit für das homogene Anfangswertproblem die reelle Lösung

$$u(t) = \big(z_1 \exp(\lambda t) + z_2 \exp(-\lambda t)\big) \exp(-\kappa t) \ \text{ für } t \in \mathbb{R}$$

mit den Koordinaten $z_1 = \frac{1}{2\lambda}\big((\lambda + \kappa)x_0 + v_0\big)$ und $z_2 = \frac{1}{2\lambda}\big((\lambda - \kappa)x_0 - v_0\big)$.

Grenzfall. Im Falle $\kappa = \omega$ ergibt sich die zweifache reelle Lösung $\mu_1 = -\kappa < 0$ der charakteristischen Gleichung. Das Anfangswertproblem hat die reelle Lösung

$$u(t) = (z_1 + z_2 t) \exp(-\kappa t) \ \text{ für } t \in \mathbb{R}$$

mit den Koordinaten $z_1 = x_0$ und $z_2 = \kappa x_0 + v_0$.

Schwache Dämpfung. Im Falle $\kappa < \omega$ erhält man für $\lambda = \sqrt{\omega^2 - \kappa^2} < \omega$ zwei konjugiert komplexe Lösungen $\mu_1 = -\kappa + \lambda\mathbb{i}$ und $\mu_2 = \overline{\mu}_1 = -\kappa - \lambda\mathbb{i}$ der charakteristischen Gleichung. Das Anfangswertproblem hat die komplexe Lösung

$$u(t) = \big(z_1\,\mathrm{Exp}(\lambda\mathbb{i}t) + z_2\,\mathrm{Exp}(-\lambda\mathbb{i}t)\big) \exp(-\kappa t) \ \text{ für } t \in \mathbb{R}$$

mit komplexen Koordinaten $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Die Bildung des Real- und Imaginärteils von $z_1\,\mathrm{Exp}(\lambda\mathbb{i}t)$ liefert somit für das Anfangswertproblem die reelle Lösung

$$u(t) = \big(\xi_1 \cos\lambda t + \xi_2 \sin\lambda t\big) \exp(-\kappa t) \ \text{ für } t \in \mathbb{R}$$

mit den reellen Koordinaten $\xi_1 = x_0$ und $\xi_2 = \frac{1}{\lambda}(\kappa x_0 + v_0)$.

Erzwungene elastische Schwingungen. Unter denselben Voraussetzungen wie zuvor werden Lösungen $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des inhomogenen Anfangswertproblems

$$D^2 u_0(t) + 2\kappa D u_0(t) + \omega^2 u_0(t) = w(t) \;\text{ für } t \in \mathbb{R}, \;\; u_0(0) = 0, \;\; D u_0(0) = 0$$

erzwungener elastischer Schwingungen betrachtet, welche von einer stetigen Inhomogenität $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erregt werden.

Schwache Dämpfung. Im Falle $\kappa < \omega$ bilden die beiden Lösungen

$$u_1(t) = \cos\lambda t \exp(-\kappa t) \;\text{ sowie }\; u_2(t) = \sin\lambda t \exp(-\kappa t) \;\text{ für } t \in \mathbb{R}$$

mit $\lambda = \sqrt{\omega^2 - \kappa^2}$ ein Fundamentalsystem der homogenen Differentialgleichung der freien elastischen Schwingungen. Als Inverse der Wronski-Matrix

$$W(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ Du_1(t) & Du_2(t) \end{pmatrix} = \exp(-\kappa t) \begin{pmatrix} \cos\lambda t & \sin\lambda t \\ -\lambda\sin\lambda t - \kappa\cos\lambda t & \lambda\cos\lambda t - \kappa\sin\lambda t \end{pmatrix}$$

erhält man

$$W(t)^{-1} = \frac{\exp(\kappa t)}{\lambda} \begin{pmatrix} \lambda\cos\lambda t - \kappa\sin\lambda t & -\sin\lambda t \\ \lambda\sin\lambda t + \kappa\cos\lambda t & \cos\lambda t \end{pmatrix} \;\text{ für } t \in \mathbb{R}.$$

Die Lösung $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des inhomogenen Anfangswertproblems hat die Gestalt

$$\begin{aligned} u_0(t) &= U(t) \int_0^t W(s)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ w(s) \end{pmatrix} ds = \big(u_1(t), u_2(t)\big) \int_0^t \frac{w(s)\exp(\kappa s)}{\lambda} \begin{pmatrix} -\sin\lambda s \\ \cos\lambda s \end{pmatrix} ds \\ &= \frac{\sin\lambda t}{\lambda\exp(\kappa t)} \int_0^t w(s)\exp(\kappa s)\cos\lambda s\, ds - \frac{\cos\lambda t}{\lambda\exp(\kappa t)} \int_0^t w(s)\exp(\kappa s)\sin\lambda s\, ds \\ &= \frac{1}{\lambda} \int_0^t w(s)\exp(\kappa(s-t))\sin\lambda(t-s)\, ds \end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.