

## Autonome Gleichungen zweiter Ordnung

Für lineare Abbildungen  $A, B \in L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  sollen Lösungen  $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  der autonomen homogenen Differentialgleichung  $D^2v(t) = BDv(t) + Av(t)$  zweiter Ordnung für  $t \in \mathbb{R}$  mit Hilfe eines verallgemeinerten Eigenwertproblems untersucht werden.

**Komplexe autonome Differentialgleichungen.** Seien  $A, B \in L(\mathbb{C}^n; \mathbb{C}^n)$  gegeben.

1. Die Menge aller zweimal stetig differenzierbaren Lösungen  $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$  der autonomen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(H) \quad D^2v(t) = BDv(t) + Av(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$

bilden einen linearen Raum  $V$  der Dimension  $\dim V = 2n$  über dem Körper  $\mathbb{C}$ .

2. Es gibt  $q \in \{1, \dots, 2n\}$  paarweise verschiedene Lösungen  $\mu_1, \dots, \mu_q \in \mathbb{C}$  der charakteristischen Gleichung  $\det(A + \mu B - \mu^2 E_n) = 0$  von (H) mit algebraischen Vielfachheiten  $m_1, \dots, m_q \in \{1, \dots, 2n\}$ , wobei  $\sum_{\ell=1}^q m_\ell = 2n$  gilt.

3. Zur Konstruktion eines Fundamentalsystems von (H), das heißt einer Basis

$$\{v_{\ell r} \mid \ell \in \{1, \dots, q\}, r \in \{1, \dots, m_\ell\}\}$$

des Lösungsraums  $V$ , werden für jedes  $\ell \in \{1, \dots, q\}$  alle Funktionen  $v_{\ell r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$  der Gestalt

$$v_{\ell r}(t) = z_{\ell r}(t) \text{Exp}(\mu_\ell t) \quad \text{für } t \in \mathbb{R}$$

mit Polynomen  $z_{\ell r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$  höchstens  $(r-1)$ -ten Grades für  $r \in \{1, \dots, m_\ell\}$  untersucht, so daß die Funktion  $v = \sum_{r=1}^{m_\ell} v_{\ell r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$  eine Lösung der Gleichung (H) ist. Dieser Ansatz führt auf ein verallgemeinertes Eigenwertproblem

$$\sum_{r=1}^{m_\ell} (A + \mu_\ell B - \mu_\ell^2 E_n) z_{\ell r}(t) = \sum_{r=1}^{m_\ell} D^2 z_{\ell r}(t) - \sum_{r=1}^{m_\ell} (B - 2\mu_\ell E_n) D z_{\ell r}(t)$$

für  $t \in \mathbb{R}$ , das durch Koeffizientenvergleich bzgl. Termen gleicher Ordnung in  $t$  auf höchstens  $m_\ell$  lineare Gleichungssysteme zur Bestimmung von  $m_\ell$  linear unabhängigen Polynomen  $z_{\ell 1}, \dots, z_{\ell m_\ell}$  zurückgeführt werden kann.

Liegen im Kern der Abbildung  $A + \mu_\ell B - \mu_\ell^2 E_n \in L(\mathbb{C}^n; \mathbb{C}^n)$  für  $\ell \in \{1, \dots, q\}$  die volle Anzahl  $m_\ell$  linear unabhängiger Vektoren  $z_{\ell 1}, \dots, z_{\ell m_\ell} \in \mathbb{C}^n$ , so kann man selbige als Polynome nullter Ordnung für diesen Zweck heranziehen.

**Reelle autonome Differentialgleichungen.** Seien  $A, B \in L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  gegeben sowie

$$\{v_{\ell r} \mid \ell \in \{1, \dots, q\}, r \in \{1, \dots, m_\ell\}\}$$

das zuvor konstruierte *komplexwertige* Fundamentalsystem von (H). Darauf aufbauend soll ein *reellwertiges* Fundamentalsystem von (H) konstruiert werden:

1. Hat die Lösung  $\mu = \mu_\ell \in \mathbb{C}$  von  $\det(A + \mu B - \mu^2 E_n) = 0$  für ein  $\ell \in \{1, \dots, q\}$  den Imaginärteil  $\text{Im } \mu = 0$ , dann gilt auch für jede Funktion  $v \in \{v_{\ell 1}, \dots, v_{\ell m_\ell}\}$  des komplexwertigen Fundamentalsystems von (H) stets  $\text{Im } v(t) = 0$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ .

2. Besitzt eine Lösung  $\mu = \mu_\ell \in \mathbb{C}$  von  $\det(A + \mu B - \mu^2 E_n) = 0$  für einen Index  $\ell \in \{1, \dots, q\}$  den Realteil  $\text{Re } \mu = \alpha \in \mathbb{R}$  und den Imaginärteil  $\text{Im } \mu = \beta \neq 0$  und ist  $z \in \mathbb{C}^n$  ein Vektor mit  $(A + \mu B - \mu^2 E_n)z = 0$ , so gilt auch  $(A + \bar{\mu} B - \bar{\mu}^2 E_n)\bar{z} = 0$  und somit  $\det(A + \bar{\mu} B - \bar{\mu}^2 E_n) = 0$ .

Da für jedes Polynom  $z \in \{z_{\ell 1}, \dots, z_{\ell m_\ell}\}$  die durch  $v(t) = z(t) \text{Exp}(\mu t)$  für  $t \in \mathbb{R}$  definierte Funktion  $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$  Teil des komplexwertigen Fundamentalsystems von (H) ist, folgt aus  $D^2 v(t) = B D v(t) + A v(t)$  auch  $D \bar{v}(t) = B D \bar{v}(t) + A \bar{v}(t)$  für jedes  $t \in \mathbb{R}$ . Damit sind  $v, \bar{v} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$  linear unabhängige Lösungen von (H) mit

$$v(t) = z(t) \text{Exp}(\mu t) \quad \text{und} \quad \bar{v}(t) = \bar{z}(t) \text{Exp}(\bar{\mu} t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Sind  $\text{Re } z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  sowie  $\text{Im } z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  Real- und Imaginärteil von  $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ , so folgt für den Realteil  $\text{Re } v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  und den Imaginärteil  $\text{Im } v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  von  $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  die Darstellung

$$\begin{aligned} \text{Re } v(t) &= \exp(\alpha t) (\text{Re } z(t) \cdot \cos \beta t - \text{Im } z(t) \cdot \sin \beta t), \\ \text{Im } v(t) &= \exp(\alpha t) (\text{Re } z(t) \cdot \sin \beta t + \text{Im } z(t) \cdot \cos \beta t). \end{aligned}$$

Somit kann man jedes Paar linear unabhängiger Lösungen  $v, \bar{v} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$  des komplexwertigen Fundamentalsystems von (H) jeweils durch das Paar linear unabhängiger Lösungen  $\text{Re } v, \text{Im } v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  von (H) ersetzen und erhält insgesamt ein Fundamentalsystem  $\{v_1, \dots, v_{2n}\}$  reellwertiger Lösungen von (H) für  $A, B \in L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ .