Vorlesung 3

Lineare Abbildungen

Seien V, W, X und Y lineare Räume über demselben Körper $\mathbb{K}$ von Skalaren $\lambda \in \mathbb{K}$ und A eine Menge von Indizes $\alpha \in A$.

Lineare Abbildungen. 1. Eine Abbildung $T : V \to W$ heißt *linear*, wenn für alle Skalare $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ und Vektoren $u, v \in V$ stets $T(\lambda u + \mu v) = \lambda T(u) + \mu T(v)$ gilt.

2. Insbesondere erhält man $T(0) = 0$ sowie $T\big(\sum_{\ell=1}^n \lambda_\ell u_\ell\big) = \sum_{\ell=1}^n \lambda_\ell T(u_\ell)$ für alle endlichen Familien $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subset \mathbb{K}$ und $\{u_1, \dots, u_n\} \subset V$.

Bildraum und Kern linearer Abbildungen. Sei die Abbildung $T : V \to W$ linear.

1. Für jeden linearen Teilraum V_0 von V ist das Bild $T[V_0]$ ein linearer Teilraum von W. Das Bild $T[V]$ des ganzen Raumes V wird *Bildraum* von T genannt.

2. Die Abbildung T ist genau dann surjektiv, wenn $T[V] = W$ gilt.

3. Für jede Familie $\{V_\alpha \mid \alpha \in A\}$ linearer Teilräume von V gilt die Beziehung $T\big[\sum_{\alpha\in A} V_\alpha\big] = \sum_{\alpha \in A} T[V_\alpha]$.

4. Für jeden linearen Teilraum W_0 von W ist das Urbild $T^{-1}[W_0]$ ein linearer Teilraum von V. Das Urbild $T^{-1}[\{0\}]$ des Nullraums $\{0\} \subset W$ nennt man *Kern* von T.

5. Die Abbildung T ist genau dann injektiv, wenn $T^{-1}[\{0\}] = \{0\}$ gilt.

Bijektive lineare Abbildungen. Eine bijektive lineare Abbildung $T : V \to W$ wird als *Isomorphismus* von V auf W bezeichnet. Ihre inverse Abbildung $T^{-1} : W \to V$ ist dann ebenfalls linear und somit ein Isomorphismus von W auf V.

Dimension von Bildraum und Kern. Sei $T : V \to W$ eine lineare Abbildung.

1. Der Bildraum $T[V] \subset W$ ist genau dann endlichdimensional, wenn der Kern $T^{-1}[\{0\}] \subset V$ von endlicher Codimension ist, und es gilt $\dim T[V] = \operatorname{codim} T^{-1}[\{0\}]$.

2. Ist der lineare Teilraum U von V endlichdimensional und $V = T^{-1}[\{0\}] + U$ eine direkte Summe, so ist die Einschränkung $T|U$ ein Isomorphismus von U auf $T[V]$.

3. Sei die Familie $\{w_\alpha \mid \alpha \in A\} \subset T[V]$ linear unabhängig und jedem $\alpha \in A$ ein $u_\alpha \in V$ mit $T(u_\alpha) = w_\alpha$ zugeordnet. Dann ist die Familie $\{u_\alpha \mid \alpha \in A\} \subset V$ linear unabhängig, und $T^{-1}[\{0\}] + \sum_{\alpha\in A} \operatorname{lin}\{u_\alpha\}$ ist eine direkte Summe.

Linearer Raum aller linearen Abbildungen. Auf der Menge $L(V;W)$ aller linearen Abbildungen $T : V \to W$ wird die Struktur eines linearen Raumes über $\mathbb{K}$ eingeführt, indem man mit der

Addition jedem Paar $(T, S) \in L(V;W) \times L(V;W)$ die *Summe* $T + S \in L(V;W)$ zuweist, welche durch $(T + S)(u) = T(u) + S(u) \in W$ für $u \in V$ definiert wird,

Skalarmultiplikation jedem Paar $(\lambda, T) \in \mathbb{K} \times L(V;W)$ das durch die Vorschrift $(\lambda T)(u) = \lambda T(u) \in W$ für $u \in V$ definierte *Vielfache* $\lambda T \in L(V;W)$ zuordnet.

Verkettung linearer Abbildungen. Es gelten die folgenden Rechenregeln:

1. Für alle $T \in L(V; W)$ und $S \in L(W; X)$ gilt $ST \in L(V; X)$.
2. Für alle $T \in L(V; W)$, $S \in L(W; X)$, $R \in L(X; Y)$ gilt $R(ST) = (RS)T$.
3. Für alle $T_1, T_2 \in L(V; W)$ und $S \in L(W; X)$ gilt $S(T_1 + T_2) = ST_1 + ST_2$.
4. Für alle $T \in L(V; W)$ und $S_1, S_2 \in L(W; X)$ gilt $(S_1 + S_2)T = S_1T + S_2T$.
5. Für alle $T \in L(V; W)$, $S \in L(W; X)$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt $S(\lambda T) = \lambda ST$.

Bildraum und Kern verketteter linearer Abbildungen. 1. Für alle $T \in L(V; W)$, $S \in L(W; X)$ ist der Bildraum $(ST)[V] = S[T[V]]$ der Verkettung $ST \in L(V; X)$ der Bildraum bezüglich S des Bildraums $T[V]$ von T.

2. Für alle $T \in L(V; W)$, $S \in L(W; X)$ ist der Kern $(ST)^{-1}[\{0\}] = T^{-1}[S^{-1}[\{0\}]]$ der Verkettung $ST \in L(V; X)$ das Urbild bezüglich T des Kerns $S^{-1}[\{0\}]$ von S.

Verkettung bijektiver linearer Abbildungen. Sind $T \in L(V; W)$, $S \in L(W; X)$ bijektive lineare Abbildungen, dann ist die Verkettung $ST \in L(V; X)$ und damit auch $(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1} \in L(X; V)$ jeweils eine bijektive lineare Abbildung.

Lineare Operatoren und Projektoren. 1. Eine lineare Abbildung $T \in L(V; V)$ in sich wird als *linearer Operator* bezeichnet.

2. Ein linearer Operator $P_0 \in L(V; V)$ heißt *Projektor* auf den linearen Teilraum V_0 von V, wenn $P_0P_0 = P_0$ sowie $P_0[V] = V_0$ gelten.

Projektoren auf komplementäre Teilräume. Sei $V = V_1 + V_2$ die direkte Summe der beiden linearen Teilräume V_1 und V_2 von V.

1. Da in diesem Falle jedes $v \in V$ genau eine Zerlegung in eine Summe $v = v_1 + v_2$ mit $v_1 \in V_1$ und $v_2 \in V_2$ besitzt, werden jedem $v \in V$ zwei Vektoren $P_1(v) = v_1$ und $P_2(v) = v_2$ zugeordnet und somit zwei Projektoren P_1, $P_2 \in L(V; V)$ von V auf V_1 bzw. V_2 definiert, daß heißt, es gilt $v = P_1(v) + P_2(v)$ für alle $v \in V$ sowie

$$P_1[V] = V_1, \quad P_1^{-1}[\{0\}] = V_2, \quad P_2[V] = V_2, \quad P_2^{-1}[\{0\}] = V_1,$$

und die durch die Vorschrift $T(v) = (P_1(v), P_2(v))$ für $v \in V$ definierte lineare Abbildung $T \in L(V; V_1 \times V_2)$ ist bijektiv.

2. Sei U_2 ein weiterer linearer Teilraum von V, so daß $V = V_1 + U_2$ eine direkte Summe ist und $P_2 \in L(V; V)$ der obige Projektor von V auf V_2, welcher der direkten Summe $V = V_1 + V_2$ entspricht. Dann ist die Einschränkung $P_2|U_2 \in L(U_2; V)$ ein Isomorphismus von U_2 auf V_2.

Koordinatenabbildung. Besitzt der lineare Raum V endliche Dimension und ist $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V, so existiert für jedes $v \in V$ genau ein $x \in \mathbb{K}^n$ mit der Darstellung $v = \sum_{\ell=1}^{n} x_\ell v_\ell \in V$. Dadurch wird jedem Vektor $v \in V$ ein *Koordinatenvektor* $x = \Phi_B(v) \in \mathbb{K}^n$ bezüglich der Basis B zugeordnet und somit eine bijektive *Koordinatenabbildung* $\Phi_B \in L(V; \mathbb{K}^n)$ von V auf $\mathbb{K}^n$ erklärt.