Vorlesung 4

Duale Räume und Abbildungen

Seien V, W und X lineare Räume über demselben Körper $\mathbb{K}$ von Skalaren $\lambda \in \mathbb{K}$.

Linearformen und duale Räume. 1. Eine lineare Abbildung $f \in L(V;\mathbb{K})$ wird auch als *Linearform* oder *lineares Funktional* auf V bezeichnet.

2. Den linearen Raum $V^* = L(V;\mathbb{K})$ über $\mathbb{K}$ nennt man den zu V *dualen Raum*.

3. Die *duale Paarung* $\langle\ ,\ \rangle : V^* \times V \to \mathbb{K}$ ordnet jedem Paar $(f, u) \in V^* \times V$ den Wert $\langle f, u\rangle = f(u) \in \mathbb{K}$ zu. Für alle $u, v \in V$, $f, g \in V^*$ sowie $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ gilt somit

$$\langle f, \lambda u + \mu v\rangle = \lambda\langle f, u\rangle + \mu\langle f, v\rangle \quad \text{und} \quad \langle \lambda f + \mu g, u\rangle = \lambda\langle f, u\rangle + \mu\langle g, u\rangle.$$

Hyperebenen. 1. Ein linearer Teilraum U von V der Codimension $\operatorname{codim} U = 1$ heißt *Hyperebene* in V.

2. Jeder lineare Teilraum von V, der eine Hyperebene U in V enthält, stimmt entweder mit U überein oder ist V selbst.

3. Für jede Hyperebene U in V existiert eine Linearform $f \in V^*$, $f \neq 0$ mit $U = f^{-1}[\{\mathbb{0}\}]$. Ist $g \in V^*$ eine weitere Linearform mit $U = g^{-1}[\{\mathbb{0}\}]$, so kann man einen Skalar $\kappa \in \mathbb{K}$, $\kappa \neq \mathbb{0}$ finden, so daß $g = \kappa f$ gilt.

4. Ist umgekehrt $f \in V^*$, $f \neq 0$ eine Linearform, dann ist ihr Kern $U = f^{-1}[\{\mathbb{0}\}]$ eine Hyperebene in V; es gilt also $U = \{u \in V \mid \langle f, u\rangle = \mathbb{0}\}$.

Affine Teilräume. 1. Eine nichtleere Teilmenge M eines linearen Raums V wird als *affiner Teilraum* von V bezeichnet, wenn es einen *Verschiebungsvektor* $v \in V$ und einen linearen Teilraum U von V gibt, so daß $M = \{u \in V \mid u - v \in U\}$ gilt. Da für jeden affinen Teilraum M von V genau ein linearer Teilraum U von V mit dieser Eigenschaft existiert, definiert man seine *Dimension* und *Codimension* durch $\dim M = \dim U$ und $\operatorname{codim} M = \operatorname{codim} U$.

2. Mengen $\{v\} \subset V$ sowie lineare Teilräume $U \subset V$ sind affine Teilräume von V.

3. Eine nichtleere Teilmenge M eines linearen Raums V ist genau dann ein affiner Teilraum von V, wenn für alle $u_1, u_2 \in M$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ mit $\lambda_1 + \lambda_2 = \mathbb{1}$ stets die Beziehung $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \in M$ gilt.

Parallele Teilräume. Seien $v_1, v_2 \in V$ Verschiebungsvektoren, U_1, U_2 lineare Teilräume von V sowie $M_1 = \{u_1 \in V \mid u_1 - v_1 \in U_1\}$ und $M_2 = \{u_2 \in V \mid u_2 - v_2 \in U_2\}$ die entsprechenden affinen Teilräume von V.

1. Man nennt die Räume M_1 und M_2 *parallel*, wenn $U_1 \subset U_2$ oder $U_2 \subset U_1$ gilt.

2. Es gilt genau dann $M_1 = M_2$, wenn $U_1 = U_2$ und $v_2 - v_1 \in U_1$ erfüllt sind.

3. Der Durchschnitt $M_1 \cap M_2$ ist entweder die leere Menge oder der affine Teilraum $\{u \in V \mid u - v \in U\}$ von V mit $U = U_1 \cap U_2$ und $v \in M_1 \cap M_2$.

Affine Hyperebenen. 1. Ein affiner Teilraum M von V mit $\operatorname{codim} M = 1$ wird als *affine Hyperebene* in V bezeichnet.

2. Jeder affine Teilraum von V, der eine affine Hyperebene U in V enthält, stimmt entweder mit U überein oder ist V selbst.

3. Für jede affine Hyperebene M in V existiert eine Linearform $f \in V^*$, $f \neq 0$ und ein Skalar $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $M = \{u \in V \mid \langle f, u\rangle = \lambda\}$. Sind $g \in V^*$ eine weitere Linearform sowie $\mu \in \mathbb{K}$ ein weiterer Skalar mit $M = \{u \in V \mid \langle g, u\rangle = \mu\}$, so kann man stets einen Skalar $\kappa \in \mathbb{K}$, $\kappa \neq \mathbb{0}$ finden, so daß $g = \kappa f$ sowie $\mu = \kappa\lambda$ gelten.

4. Ist umgekehrt $f \in V^*$, $f \neq 0$ eine Linearform und $\lambda \in \mathbb{K}$ ein Skalar, dann ist $M = \{u \in V \mid \langle f, u\rangle = \lambda\}$ eine affine Hyperebene in V.

Biduale und reflexive Räume. 1. Der lineare Raum $V^{**} = L(V^*; \mathbb{K})$ über $\mathbb{K}$ heißt der zu V *biduale Raum*. Die entsprechende duale Paarung $\langle\ ,\ \rangle^* : V^{**} \times V^* \to \mathbb{K}$ weist jedem Paar $(h, f) \in V^{**} \times V^*$ den Wert $\langle h, f\rangle^* = h(f) \in \mathbb{K}$ zu.

2. Jedem Vektor $u \in V$ wird durch $\langle \Lambda_V(u), f\rangle^* = \langle f, u\rangle$ für $f \in V^*$ eine Linearform $\Lambda_V(u) \in V^{**}$ zugeordnet und somit eine lineare Abbildung $\Lambda_V \in L(V; V^{**})$ definiert. Ist $\Lambda_V \in L(V; V^{**})$ ein Isomorphismus von V auf V^{**}, so heißt V *reflexiv*.

3. Ist V reflexiv und erfüllt $u \in V$ für jedes $f \in V^*$ stets $\langle f, u\rangle = \mathbb{0}$, so folgt $u = 0$.

4. Ist $T \in L(V; W)$ ein Isomorphismus von V auf W, so ist V genau dann reflexiv, wenn W reflexiv ist.

Duale Familien. 1. Ist A eine Menge von Indizes $\alpha \in A$, so heißen die Familien $\{f_\alpha \mid \alpha \in A\} \subset V^*$ und $\{u_\alpha \mid \alpha \in A\} \subset V$ zueinander *dual*, falls

$$\langle f_\alpha, u_\beta\rangle = \begin{cases} \mathbb{1} & \text{für alle } \alpha, \beta \in A \text{ mit } \alpha = \beta, \\ \mathbb{0} & \text{für alle } \alpha, \beta \in A \text{ mit } \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

2. Sei V endlichdimensional. Dann ist V reflexiv, und zu jeder Basis $\{u_1, \dots, u_n\}$ von V existiert genau eine duale Basis $\{f_1, \dots, f_n\}$ von V^*. Der duale Raum V^* hat somit die Dimension $\dim V^* = \dim V$. Sind $\xi \in \mathbb{K}^n$, $x \in \mathbb{K}^n$ die Koordinaten von

$$f = \sum_{k=1}^{n} \xi_k f_k \in V^* \quad \text{bzw.} \quad u = \sum_{\ell=1}^{n} x_\ell u_\ell \in V$$

bzgl. dieser Basen, so ergibt sich die Darstellung

$$\langle f, u\rangle = \sum_{\ell=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \xi_k x_\ell \langle f_k, u_\ell\rangle = \sum_{\ell=1}^{n} \xi_\ell x_\ell \in \mathbb{K}.$$

Zu jeder Basis $\{f_1, \dots, f_n\}$ von V^* gibt es genau eine duale Basis $\{u_1, \dots, u_n\}$ von V.

Duale Abbildungen. 1. Zu jeder linearen Abbildung $T \in L(V; W)$ wird durch

$$\langle T^*(g), u \rangle = \langle g, T(u) \rangle \quad \text{für } g \in W^*, u \in V$$

eine lineare Abbildung $T^* \in L(W^*; V^*)$ definiert, die man als die zu T *duale* oder *adjungierte lineare Abbildung* bezeichnet.

2. Für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $S, T \in L(V; W)$ gilt $(\lambda S + \mu T)^* = \lambda S^* + \mu T^* \in L(W^*; V^*)$.

3. Die Verkettung $ST \in L(V; X)$ von $S \in L(W; X)$ und $T \in L(V; W)$ besitzt die duale Abbildung $(ST)^* = T^* S^* \in L(X^*; V^*)$.

4. Ist $T \in L(V; W)$ ein Isomorphismus von V auf W, so ist $T^* \in L(W^*; V^*)$ ein Isomorphismus von W^* auf V^* mit der Inversen $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^* \in L(V^*; W^*)$.