Vorlesung 6

Matrixdarstellung linearer Abbildungen

Seien V, W und U endlichdimensionale lineare Räume über demselben Körper $\mathbb{K}$ und $B = \{v_1, \dots, v_n\}$, $C = \{w_1, \dots, w_m\}$, $D = \{u_1, \dots, u_q\}$ Basen von V, W bzw. U.

Koordinatenabbildung. Für jedes $v \in V$ existiert genau ein $x \in \mathbb{K}^n$ mit der Darstellung $v = \sum_{\ell=1}^n x_\ell v_\ell \in V$. Dadurch wird jedem Vektor $v \in V$ ein *Koordinatenvektor* $x = \Phi_B(v) \in \mathbb{K}^n$ bzgl. der Basis B zugeordnet und eine *Koordinatenabbildung* $\Phi_B \in L(V;\mathbb{K}^n)$ erklärt, die ein Isomorphismus von V auf $\mathbb{K}^n$ ist. Die inverse Abbildung $\Phi_B^{-1} \in L(\mathbb{K}^n; V)$ hat also die Gestalt $\Phi_B^{-1}(x) = \sum_{\ell=1}^n x_\ell v_\ell \in V$ für $x \in \mathbb{K}^n$.

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\Phi_B"] & W \arrow[r, "S"] \arrow[d, "\Phi_C"] & U \arrow[d, "\Phi_D"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, "\Phi_C T \Phi_B^{-1}"'] & \mathbb{K}^m \arrow[r, "\Phi_D S \Phi_C^{-1}"'] & \mathbb{K}^q
\end{tikzcd}$$

Koordinatendarstellung linearer Abbildungen. 1. Jeder Abbildung $T \in L(V;W)$ wird eine *Koordinatendarstellung* $\Phi_C T \Phi_B^{-1} \in L(\mathbb{K}^n;\mathbb{K}^m)$ bzgl. der Basen B und C zugeordnet, welche den Koordinaten $\Phi_B(v) \in \mathbb{K}^n$ von $v \in V$ bzgl. der Basis B die Koordinaten $\Phi_C(T(v)) \in \mathbb{K}^m$ von $T(v) \in W$ bzgl. der Basis C zuweist. Die Abbildung, die jedem $T \in L(V;W)$ die Koordinatendarstellung $\Phi_C T \Phi_B^{-1} \in L(\mathbb{K}^n;\mathbb{K}^m)$ zuordnet, ist ein Isomorphismus.

2. Stellt man für jedes $\ell \in \{1, \dots, n\}$ das Bild $T(v_\ell) = \sum_{k=1}^m \tau_{k\ell} w_k \in W$ des Basisvektors $v_\ell \in B$ jeweils mit Hilfe der Koordinaten $\tau_{1\ell}, \dots, \tau_{m\ell} \in \mathbb{K}$ bzgl. der Basis C dar, so wird die Koordinatendarstellung $\Phi_C T \Phi_B^{-1} \in L(\mathbb{K}^n;\mathbb{K}^m)$ von der $(m \times n)$-*Matrix* $(\tau_{k\ell})$ mit m *Zeilen*, n *Spalten* und den *Elementen* $\tau_{k\ell} \in \mathbb{K}$ bestimmt.

Linearer Raum von Matrizen. Auf der Menge $\mathbb{K}^{m\times n}$ aller $(m \times n)$-*Matrizen*

$$A = (\tau_{k\ell}) = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \cdots & \tau_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \tau_{m1} & \cdots & \tau_{mn} \end{pmatrix}$$

mit m *Zeilen*, n *Spalten* und *Elementen* $\tau_{k\ell} \in \mathbb{K}$ wird durch

Addition, die Paaren $(A_1, A_2) \in \mathbb{K}^{m\times n} \times \mathbb{K}^{m\times n}$ von Matrizen $A_1 = (\tau_{k\ell})$, $A_2 = (\sigma_{k\ell})$ die *Summe* $A_1 + A_2 = (\tau_{k\ell} + \sigma_{k\ell}) \in \mathbb{K}^{m\times n}$ zuordnet,

Skalare Multiplikation, die Paaren $(\lambda, A) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}^{m\times n}$ eines Skalars $\lambda \in \mathbb{K}$ und einer Matrix $A = (\tau_{k\ell})$ das *Vielfache* $\lambda A = (\lambda\tau_{k\ell}) \in \mathbb{K}^{m\times n}$ zuweist,

die Struktur eines linearen Raumes über $\mathbb{K}$ eingeführt.

Koordinatendarstellung einer Verkettung. 1. Sind $S \in L(W;U)$, $T \in L(V;W)$ lineare Abbildungen, so ergibt sich für die Verkettung $ST \in L(V;U)$ die Koordinatendarstellung $\Phi_D(ST)\Phi_B^{-1} = \big(\Phi_D S\Phi_C^{-1}\big)\big(\Phi_C T\Phi_B^{-1}\big) \in L(\mathbb{K}^n;\mathbb{K}^q)$.

2. Stellt man für jedes $\ell \in \{1,\dots,n\}$ das Bild $T(v_\ell) = \sum_{k=1}^m \tau_{k\ell} w_k \in W$ des Basisvektors $v_\ell \in B$ mit Hilfe der Koordinaten $\tau_{1\ell},\dots,\tau_{m\ell} \in \mathbb{K}$ bzgl. der Basis C und für jedes $k \in \{1,\dots,m\}$ das Bild $S(w_k) = \sum_{j=1}^q \sigma_{jk} u_j \in U$ des Basisvektors $w_k \in C$ mittels der Koordinaten $\sigma_{1k},\dots,\sigma_{qk} \in \mathbb{K}$ bzgl. der Basis D dar, so erhält man für jedes $\ell \in \{1,\dots,n\}$ für die Koordinaten $\gamma_{1\ell},\dots,\gamma_{q\ell} \in \mathbb{K}$ des Bildes $ST(v_\ell) = \sum_{j=1}^q \gamma_{j\ell} u_j \in U$ des Basisvektors $v_\ell \in B$ bzgl. der Basis D die Beziehung

$$\sum_{j=1}^{q} \gamma_{j\ell} u_j = ST(v_\ell) = \sum_{k=1}^{m} \tau_{k\ell}\, S(w_k) = \sum_{j=1}^{q} \left(\sum_{k=1}^{m} \sigma_{jk}\tau_{k\ell}\right) u_j$$

und somit die $(q \times n)$-*Produktmatrix* $(\gamma_{j\ell}) = \big(\sum_{k=1}^m \sigma_{jk}\tau_{k\ell}\big)$ der Koordinatendarstellung $\Phi_D(ST)\Phi_B^{-1} \in L(\mathbb{K}^n;\mathbb{K}^q)$ der Verkettung $ST \in L(V;U)$.

Produkte von Matrizen. Das *Produkt* zweier Matrizen $A_2 = (\sigma_{jk}) \in \mathbb{K}^{q\times m}$ und $A_1 = (\tau_{k\ell}) \in \mathbb{K}^{m\times n}$ wird durch $A_2A_1 = \big(\sum_{k=1}^m \sigma_{jk}\tau_{k\ell}\big) \in \mathbb{K}^{q\times n}$ definiert.

Matrixdarstellung linearer Abbildungen. Die Abbildung, welche einer jeden Matrix $(\tau_{k\ell}) \in \mathbb{K}^{m\times n}$ die durch Multiplikation mit einem Spaltenvektor gemäß

$$M(x) = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \cdots & \tau_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \tau_{m1} & \cdots & \tau_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{11}x_1 + \cdots + \tau_{1n}x_n \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \tau_{m1}x_1 + \cdots + \tau_{mn}x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m \quad \text{für } x \in \mathbb{K}^n$$

definierte lineare Abbildung $M \in L(\mathbb{K}^n;\mathbb{K}^m)$ zuweist, ist ein Isomorphismus.

Bildraum, Kern, Rang und Defekt von Matrizen. Sei $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ eine Matrix.

1. Die Dimension des *Bildraums* $A[\mathbb{K}^n] = \{Ax \in \mathbb{K}^m \mid x \in \mathbb{K}^n\}$, also die maximale Anzahl $r \in \{0,\dots,\min\{m,n\}\}$ linear unabhängiger Spalten von A, heißt *Rang von A*.

2. Die Dimension $d = n - r \in \{0,\dots,n\}$ des *Kerns* $A^{-1}[\{0\}] = \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = 0\}$ nennt man *Defekt von A*.

Koordinatendarstellung der inversen Abbildung. 1. Die identische Abbildung $I_V \in L(V;V)$ besitzt die Koordinatendarstellung $\Phi_B I_V \Phi_B^{-1} = I_{\mathbb{K}^n} \in L(\mathbb{K}^n;\mathbb{K}^n)$ mit der $(n\times n)$-*Einheitsmatrix* $E_n = (\delta_{j\ell})$, die für $j,\ell \in \{1,\dots,n\}$ durch $\delta_{j\ell} = \mathbb{1}$ im Falle $j = \ell$ sowie durch $\delta_{j\ell} = \mathbb{0}$ im Falle $j \neq \ell$ gegeben ist.

2. Seien $q = m = n$ sowie $U = V$ und $D = B$ gegeben, ferner $T \in L(V;W)$ ein Isomorphismus und $S = T^{-1} \in L(W;V)$ die inverse Abbildung. Ist $(\tau_{k\ell})$ die $(n\times n)$-Matrix der Koordinatendarstellung $\Phi_C T\Phi_B^{-1} \in L(\mathbb{K}^n;\mathbb{K}^n)$ und (σ_{jk}) die dazu *inverse* $(n\times n)$-*Matrix* der Koordinatendarstellung $\Phi_B S\Phi_C^{-1} \in L(\mathbb{K}^n;\mathbb{K}^n)$, dann gilt $\big(\sum_{k=1}^m \sigma_{jk}\tau_{k\ell}\big) = \big(\sum_{k=1}^m \tau_{jk}\sigma_{k\ell}\big) = (\delta_{j\ell})$.

Invertierbare Matrizen. 1. Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ heißt *invertierbar*, wenn es eine *inverse Matrix* $A^{-1} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit der Eigenschaft $AA^{-1} = A^{-1}A = E_n$ gibt.

2. Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ist genau dann invertierbar, wenn sie den Rang n besitzt.

3. Sind $A_1, A_2 \in \mathbb{K}^{n\times n}$ invertierbare Matrizen, dann hat das Produkt $A_2A_1 \in \mathbb{K}^{n\times n}$ die inverse Matrix $(A_2A_1)^{-1} = A_1^{-1}A_2^{-1} \in \mathbb{K}^{n\times n}$.