Vorlesung 7

Matrizen und lineare Gleichungssysteme

Seien V und W endlichdimensionale lineare Räume über demselben Körper $\mathbb{K}$ sowie $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ und $C = \{w_1, \ldots, w_m\}$ Basen von V bzw. W. Sei $F = \{f_1, \ldots, f_n\}$ die zu B duale Basis von V^* und $G = \{g_1, \ldots, g_m\}$ die zu C duale Basis von W^*.

Koordinatendarstellung der dualen Abbildung. Sei $T \in L(V; W)$ eine lineare Abbildung und $T^* \in L(W^*; V^*)$ die duale Abbildung.

Stellt man für jedes $\ell \in \{1, \ldots, n\}$ das Bild $T(v_\ell) = \sum_{i=1}^m \tau_{i\ell} w_i \in W$ des Basisvektors $v_\ell \in B$ mit Hilfe der Koordinaten $\tau_{1\ell}, \ldots, \tau_{m\ell} \in \mathbb{K}$ bzgl. der Basis C dar, so ergibt sich für jedes $k \in \{1, \ldots, m\}$ für die Koordinaten $\sigma_{1k}, \ldots, \sigma_{nk} \in \mathbb{K}$ des Bildes $T^*(g_k) = \sum_{j=1}^n \sigma_{jk} f_j \in V^*$ der Linearform $g_k \in G$ bzgl. der Basis F die Beziehung

$$\sigma_{\ell k} = \sum_{j=1}^{n} \sigma_{jk} \langle f_j, v_\ell \rangle = \langle T^*(g_k), v_\ell \rangle = \langle g_k, T(v_\ell) \rangle = \sum_{i=1}^{m} \tau_{i\ell} \langle g_k, w_i \rangle = \tau_{k\ell}.$$

Die $(n \times m)$-Matrix $(\sigma_{\ell k})$ der Koordinatendarstellung $\Phi_F T^* \Phi_G^{-1} \in L(\mathbb{K}^m; \mathbb{K}^n)$ der dualen Abbildung $T^* \in L(W^*; V^*)$ ist die *Transponierte* der $(m \times n)$-Matrix $(\tau_{k\ell})$ der Koordinatendarstellung $\Phi_C T \Phi_B^{-1} \in L(\mathbb{K}^n; \mathbb{K}^m)$ von $T \in L(V; W)$.

Transponierte Matrizen. 1. Die *Transponierte* $A^\intercal = (\sigma_{\ell k}) \in \mathbb{K}^{n \times m}$ einer Matrix $A = (\tau_{k\ell}) \in \mathbb{K}^{m \times n}$ wird durch $\sigma_{\ell k} = \tau_{k\ell}$ für $k \in \{1, \ldots, m\}$, $\ell \in \{1, \ldots, n\}$ definiert.

2. Jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ hat denselben Rang $r = \dim A[\mathbb{K}^n] = \dim A^\intercal[\mathbb{K}^m]$ wie ihre Transponierte $A^\intercal \in \mathbb{K}^{n \times m}$. Somit stimmt die maximale Anzahl linear unabhängiger Spalten von A mit der maximalen Anzahl linear unabhängiger Spalten von $A^\intercal$, also auch mit der maximalen Anzahl linear unabhängiger Zeilen von A überein.

3. Das Produkt $A_2 A_1 \in \mathbb{K}^{q \times n}$ der Matrizen $A_2 \in \mathbb{K}^{q \times m}$ und $A_1 \in \mathbb{K}^{m \times n}$ hat die Transponierte $(A_2 A_1)^\intercal = A_1^\intercal A_2^\intercal \in \mathbb{K}^{n \times q}$.

4. Ist $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ invertierbar, so ist auch die Transponierte $A^\intercal \in \mathbb{K}^{n \times n}$ invertierbar, und es gilt $(A^\intercal)^{-1} = (A^{-1})^\intercal \in \mathbb{K}^{n \times n}$.

Lineare Gleichungen. Sei $T^* \in L(W^*; V^*)$ die zu $T \in L(V; W)$ duale Abbildung.

1. Die *primale inhomogene* Gleichung $T(v) = w \in W$ besitzt genau dann eine Lösung $v \in V$, wenn $w \in T[V]$ gilt, das heißt, wenn $\langle g, w \rangle = \mathbb{0}$ für alle Lösungen $g \in W^*$ der *dualen homogenen* Gleichung $T^*(g) = 0$ gilt.

2. Die *duale inhomogene* Gleichung $T^*(g) = f \in V^*$ besitzt genau dann eine Lösung $g \in W^*$, wenn $f \in T^*[W^*]$ gilt, das heißt, wenn $\langle f, v \rangle = \mathbb{0}$ für alle Lösungen $v \in V$ der *primalen homogenen* Gleichung $T(v) = 0$ gilt.

3. Dabei gilt $\dim T[V] = \operatorname{codim} T^{-1}[\{0\}] = \operatorname{codim}(T^*)^{-1}[\{0\}] = \dim T^*[W^*]$.

Lineare Gleichungssysteme. Sei $A^\intercal \in \mathbb{K}^{n\times m}$ die Transponierte von $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$.

1. Das *primale inhomogene* Gleichungssystem $Ax = y \in \mathbb{K}^m$ hat genau dann eine Lösung $x \in \mathbb{K}^n$, wenn $y \in A[\mathbb{K}^n]$ gilt, das heißt, wenn $\eta^\intercal y = \sum_{k=1}^m \eta_k y_k = \mathbb{0}$ für alle Lösungen $\eta \in \mathbb{K}^m$ des *dualen homogenen* Gleichungssystems $A^\intercal \eta = 0$ gilt.
2. Das *duale inhomogene* Gleichungssystem $A^\intercal \eta = \xi \in \mathbb{K}^n$ hat genau dann eine Lösung $\eta \in \mathbb{K}^m$, wenn $\xi \in A^\intercal[\mathbb{K}^m]$ gilt, das heißt, wenn $\xi^\intercal x = \sum_{\ell=1}^n \xi_\ell x_\ell = \mathbb{0}$ für alle Lösungen $x \in \mathbb{K}^n$ des *primalen homogenen* Gleichungssystems $Ax = 0$ gilt.
3. Dabei gilt $\dim A[\mathbb{K}^n] = \operatorname{codim} A^{-1}[\{0\}] = \operatorname{codim}(A^\intercal)^{-1}[\{0\}] = \dim A^\intercal[\mathbb{K}^m]$.

Gauß-Algorithmus zur Lösung von Matrixgleichungen. Für jede *Koeffizientenmatrix* $(\tau_{k\ell}) \in \mathbb{K}^{m\times n}$ hat die *Matrixgleichung*

$$\begin{pmatrix} \tau_{11} & \cdots & \tau_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \tau_{m1} & \cdots & \tau_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ y_{m1} & \cdots & y_{mq} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{m\times q},$$

also eine Anzahl von q *simultanen* Gleichungssystemen, genau dann eine Lösung

$$X = (x_{\ell j}) = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nq} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n\times q},$$

wenn nach elementaren Umformungen

1. Multiplikation einer Gleichung mit einem von $\mathbb{0}$ verschiedenen Faktor
2. Addition des Vielfachen einer Gleichung zu einer anderen Gleichung
3. Vertauschung zweier Gleichungen
4. Vertauschung zweier Spalten von Summanden auf der linken Seite,

welche stets den Rang $r \in \{0, \ldots, \min\{m, n\}\}$ der jeweiligen Koeffizientenmatrix erhalten, die Matrixgleichung in *gestaffelter Endform*

$$\begin{pmatrix} \mathbb{1} & \cdots & \mathbb{0} & \tau^\circ_{1r+1} & \cdots & \tau^\circ_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbb{0} & \cdots & \mathbb{1} & \tau^\circ_{rr+1} & \cdots & \tau^\circ_{rn} \\ \mathbb{0} & \cdots & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \cdots & \mathbb{0} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbb{0} & \cdots & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \cdots & \mathbb{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^\circ_{11} & \cdots & x^\circ_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ x^\circ_{r1} & \cdots & x^\circ_{rq} \\ x^\circ_{r+1,1} & \cdots & x^\circ_{r+1,q} \\ \vdots & & \vdots \\ x^\circ_{n1} & \cdots & x^\circ_{nq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^\circ_{11} & \cdots & y^\circ_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ y^\circ_{r1} & \cdots & y^\circ_{rq} \\ y^\circ_{r+1,1} & \cdots & y^\circ_{r+1,q} \\ \vdots & & \vdots \\ y^\circ_{m1} & \cdots & y^\circ_{mq} \end{pmatrix}$$

eine Lösung $X^\circ = (x^\circ_{\ell j}) \in \mathbb{K}^{n\times q}$ hat, was genau dann der Fall ist, wenn die Bedingung

$$\begin{pmatrix} y^\circ_{r+1,1} & \cdots & y^\circ_{r+1,q} \\ \vdots & & \vdots \\ y^\circ_{m1} & \cdots & y^\circ_{mq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{0} & \cdots & \mathbb{0} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbb{0} & \cdots & \mathbb{0} \end{pmatrix} \quad \text{erfüllt ist.}$$

Diese Lösung $X^\circ \in \mathbb{K}^{n\times q}$ ist genau dann *eindeutig* bestimmt, wenn zudem $r = n$ gilt.