Vorlesung 8

Determinanten

Sei V ein linearer Raum über dem Körper $\mathbb{K}$ und $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis in V.

Multilinearformen. Für jedes $r \in \{1, \dots, n\}$ betrachtet man die Menge L_r aller Multiindizes $L = (\ell_1, \dots, \ell_r) \in \mathbb{N}^r$ mit $1 \leq \ell_1, \dots, \ell_r \leq n$.

1. Eine Abbildung $F : V^r \to \mathbb{K}$ heißt r-*Linearform*, wenn die Beziehung

$$\begin{aligned} &F(u_1, \dots, u_{k-1}, \lambda u_k + \mu w_k, u_{k+1}, \dots, u_r) \\ &\qquad = \lambda F(u_1, \dots, u_{k-1}, u_k, u_{k+1}, \dots, u_r) + \mu F(u_1, \dots, u_{k-1}, w_k, u_{k+1}, \dots, u_r) \end{aligned}$$

für alle $u_1, \dots, u_r \in V$, $w_1, \dots, w_r \in V$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ sowie $k \in \{1, \dots, r\}$ gilt.

2. Dies ist äquivalent dazu, daß für jede Matrix $(\tau_{k\ell}) \in \mathbb{K}^{r \times n}$ die Beziehung

$$F\big(\textstyle\sum_{\ell=1}^n \tau_{1\ell} v_\ell, \dots, \sum_{\ell=1}^n \tau_{r\ell} v_\ell\big) = \displaystyle\sum_{L \in L_r} \tau_{1\ell_1} \cdots \tau_{r\ell_r} F(v_{\ell_1}, \dots, v_{\ell_r})$$

gilt, woraus folgt, daß eine r-Linearform $F : V^r \to \mathbb{K}$ durch die n^r skalaren Werte $F(v_{\ell_1}, \dots, v_{\ell_r}) \in \mathbb{K}$ für $L = (\ell_1, \dots, \ell_r) \in L_r$ eindeutig bestimmt ist.

Alternierende Multilinearformen. 1. Für jedes $r \in \{1, \dots, n\}$ betrachtet man die Menge $\mathfrak{S}_r$ aller bijektiven Abbildungen $p : \{1, \dots, r\} \to \{1, \dots, r\}$ und definiert die *Signatur von* $p \in \mathfrak{S}_r$ durch $\operatorname{sgn}(p) = 1$ bzw. $\operatorname{sgn}(p) = -1$ je nachdem, ob $p \in \mathfrak{S}_r$ eine *gerade* bzw. *ungerade* Anzahl hintereinander ausgeführter Vertauschungen ist.

2. Eine r-Linearform $F : V^r \to \mathbb{K}$ heißt *alternierend*, wenn $F(u_1, \dots, u_r) = \mathbb{0}$ für all jene $u_1, \dots, u_r \in V$ gilt, für die es zwei Indizes $1 \leq k < \ell \leq r$ mit $u_k = u_\ell$ gibt.

3. Dies ist gleichbedeutend dazu, daß $F(u_{p(1)}, \dots, u_{p(r)}) = \operatorname{sgn}(p) F(u_1, \dots, u_r)$ für alle $u_1, \dots, u_r \in V$ und $p \in \mathfrak{S}_r$ gilt, woraus sich ergibt, daß eine alternierende r-Linearform $F : V^r \to \mathbb{K}$ durch die $\binom{n}{r}$ skalaren Werte $F(v_{\ell_1}, \dots, v_{\ell_r}) \in \mathbb{K}$ für Multiindizes $(\ell_1, \dots, \ell_r) \in \mathbb{N}^r$ mit $1 \leq \ell_1 < \cdots < \ell_r \leq n$ eindeutig bestimmt ist.

4. Somit wird eine alternierende n-Linearform $F : V^n \to \mathbb{K}$ schon durch den Wert $F(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{K}$ eindeutig festgelegt. Gilt $F(v_1, \dots, v_n) \neq \mathbb{0}$, dann existiert für jede alternierende n-Linearform $G : V^n \to \mathbb{K}$ genau ein Skalar $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $G = \lambda F$.

Determinante eines linearen Operators. Sei $T \in L(V; V)$ ein linearer Operator.

Ist $F_0 : V^n \to \mathbb{K}$ eine alternierende n-Linearform mit $F_0(v_1, \dots, v_n) \neq \mathbb{0}$, so wird durch $G_0(u_1, \dots, u_n) = F_0(T(u_1), \dots, T(u_n))$ für $u_1, \dots, u_n \in V$ eine alternierende n-Linearform $G_0 : V^n \to \mathbb{K}$ definiert. Es gibt also genau einen Skalar $\det(T) \in \mathbb{K}$, den man die *Determinante von* T nennt, so daß

$$F(T(u_1), \dots, T(u_n)) = \det(T) F(u_1, \dots, u_n)$$

für alle $u_1, \dots, u_n \in V$ und jede alternierende n-Linearform $F : V^n \to \mathbb{K}$ gilt.

Determinante einer Verkettung. Für alle linearen Operatoren $S, T \in L(V; V)$ gilt:

1. Die identische Abbildung $I_V \in L(V; V)$ besitzt die Determinante $\det(I_V) = \mathbb{1}$.

2. Die Verkettung von S und T hat die Determinante $\det(ST) = \det(S)\det(T)$.

3. Der lineare Operator $T \in L(V; V)$ ist genau dann ein Isomorphismus, wenn $\det(T) \neq \mathbb{0}$ gilt. In diesem Falle folgt $\det(T)\det(T^{-1}) = \det(TT^{-1}) = \det(I_V) = \mathbb{1}$.

Determinante einer Matrix. Sei $T \in L(V; V)$ ein linearer Operator.

1. Stellt man für jeden Index $\ell \in \{1, \dots, n\}$ das Bild $T(v_\ell) = \sum_{k=1}^{n} \tau_{k\ell} v_k \in V$ des Basisvektors $v_\ell \in B$ jeweils mit Hilfe der Koordinaten $\tau_{1\ell}, \dots, \tau_{n\ell} \in \mathbb{K}$ bzgl. der Basis B dar, so wird die Koordinatendarstellung $\Phi_B T \Phi_B^{-1} \in L(\mathbb{K}^n; \mathbb{K}^n)$ von der Matrix $A = (\tau_{k\ell}) \in \mathbb{K}^{n \times n}$ bestimmt, und man erhält

$$\begin{aligned} F(T(v_1), \dots, T(v_n)) &= \sum_{p \in \mathfrak{S}_n} \tau_{p(1)1} \cdots \tau_{p(n)n} F(v_{p(1)}, \dots, v_{p(n)}) \\ &= \sum_{p \in \mathfrak{S}_n} \tau_{p(1)1} \cdots \tau_{p(n)n} \operatorname{sgn}(p) F(v_1, \dots, v_n) \end{aligned}$$

für alle alternierenden n-Linearformen $F : V^n \to \mathbb{K}$ und somit die Darstellung

$$\det(T) = \sum_{p \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(p)\, \tau_{p(1)1} \cdots \tau_{p(n)n} = \sum_{p \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(p)\, \tau_{1p(1)} \cdots \tau_{np(n)} \in \mathbb{K}.$$

2. Da für jede alternierende n-Linearform $f : (\mathbb{K}^n)^n \to \mathbb{K}$ durch

$$F(u_1, \dots u_n) = f(\Phi_B(u_1), \dots, \Phi_B(u_n)) \quad \text{für } u_1, \dots, u_n \in V$$

eine alternierende n-Linearform $F : V^n \to \mathbb{K}$ definiert wird, folgt daraus die Definition $\det(A) = \det(\Phi_B T \Phi_B^{-1}) = \det(T)$ der *Determinante von* $A = (\tau_{k\ell}) \in \mathbb{K}^{n \times n}$.

3. Für die transponierte Matrix $A^\mathsf{T} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ von $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ gilt $\det(A^\mathsf{T}) = \det(A)$.

Cramer-Formel zur Lösung von Gleichungssystemen. 1. Das lineare Gleichungssystem $Ax = y$ hat für jedes $y \in \mathbb{K}^n$ genau eine Lösung $x \in \mathbb{K}^n$, wenn die Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ invertierbar ist, das heißt, wenn $\det(A) \neq \mathbb{0}$ gilt.

2. Sei $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \in \mathbb{K}^n$ die Lösung des Gleichungssystems $Ax = y \in \mathbb{K}^n$. Ersetzt man in der Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ die ℓ-te Spalte $Ae_\ell \in \mathbb{K}^n$ durch $Ax = y \in \mathbb{K}^n$, so erhält man für jedes $\ell \in \{1, \dots, n\}$ die Matrix

$$A_\ell = (Ae_1, \dots, Ae_{\ell-1}, Ax, Ae_{\ell+1}, \dots, Ae_n) \in \mathbb{K}^{n \times n}.$$

Daher gilt für jede alternierende n-Linearform $f : (\mathbb{K}^n)^n \to \mathbb{K}$ die Beziehung

$$\begin{aligned} f(A_\ell e_1, \dots, A_\ell e_n) &= f(Ae_1, \dots, Ae_{\ell-1}, Ax, Ae_{\ell+1}, \dots, Ae_n) \\ &= \det(A) f(e_1, \dots, e_{\ell-1}, x, e_{\ell+1}, \dots, e_n) \\ &= x_\ell \det(A) f(e_1, \dots, e_n) \end{aligned}$$

und somit die Cramer-Formel $\det(A_\ell) = x_\ell \det(A)$ für jedes $\ell \in \{1, \dots, n\}$.

Elementare Umformungen von Determinanten. Seien $A_1, A_2 \in \mathbb{K}^{n\times n}$ Matrizen.

1. Es gilt $\det(A_2) = \det(A_1)$, wenn A_2 aus A_1 durch Addition eines Vielfachen einer Zeile (bzw. Spalte) zu einer anderen Zeile (bzw. Spalte) hervorgeht.

1. Es gilt $\det(A_2) = \lambda \det(A_1)$, wenn A_2 aus A_1 durch Multiplikation einer Zeile (bzw. Spalte) mit dem Faktor $\lambda \in \mathbb{K}$ entsteht.

1. Es gilt $\det(A_2) = -\det(A_1)$, wenn A_2 aus A_1 durch Vertauschung zweier Zeilen (bzw. Spalten) hervorgeht.

Teil- und Restmatrizen. 1. Für jedes $r \in \{1,\dots,n\}$ betrachtet man das System K_r aller Multiindizes $K = (k_1,\dots,k_r) \in \mathbb{N}^r$ mit $1 \le k_1 < \cdots < k_r \le n$ und bezeichnet mit $\sigma(K) = \sum_{j=1}^r k_j \in \mathbb{N}$ jeweils die Summe dieser Indizes.

2. Legt man für eine *Ordnung* $r \in \{1,\dots,n-1\}$ in einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ einen Multiindex $K \in K_r$ von Zeilen und einen Multiindex $L \in K_r$ von Spalten fest, so erhält man durch diese Auswahl eine *Teilmatrix* $A_{KL} \in \mathbb{K}^{r\times r}$ sowie durch Streichen der entsprechenden Zeilen und Spalten eine *Restmatrix* $A''_{KL} \in \mathbb{K}^{(n-r)\times(n-r)}$.

Entwicklung in Unterdeterminanten. 1. Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ hat genau dann den Rang $r \in \{1,\dots,n-1\}$, wenn es Multiindizes $K, L \in K_r$ mit $\det_r(A_{KL}) \neq \mathbb{0}$ gibt sowie $\det_s(A_{KL}) = \mathbb{0}$ für jedes $s \in \mathbb{N}$ mit $s > r$ und alle $K, L \in K_s$ gilt.

2. Sind eine Matrix $A = (\tau_{k\ell}) \in \mathbb{K}^{n\times n}$ sowie ein Multiindex $K \in K_r$ von Zeilen für $r \in \{1,\dots,n-1\}$ gegeben, so gilt die *Entwicklungsformel von Laplace*

$$\det(A) = \sum_{L\in K_r} (-1)^{\sigma(K)+\sigma(L)} \det_r(A_{KL}) \det_{n-r}(A''_{KL}).$$

Im Spezialfall $r = 1$ und $k \in \{1,\dots,n\}$ ergibt sich somit

$$\det(A) = \sum_{\ell=1}^{n} (-1)^{k+\ell} \tau_{k\ell} \det_{n-1}(A''_{k\ell}).$$