Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Dr. Jens A. Griepentrog

Mathematik für Naturwissenschaftler II
Sommersemester 2019
https://www.math.hu-berlin.de/~griepent/19/index.html

Klausur

23. September 2019

(90 Minuten)

Name: Vorname:

Studiengang: Matrikelnummer:

Ergebnis

Aufgabe	1	2	3	4	5	$\sum$
Mögliche Punktzahl	8	8	8	8	8	40
Erreichte Punktzahl						
Korrektor						

Hinweise:

1. Bitte füllen Sie das Deckblatt vollständig und gut lesbar aus!
2. Sie können in der Klausur als Hilfsmittel ein beidseitig von Hand beschriebenes A4-Blatt benutzen.
3. Bitte fangen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt an!
4. Numerieren Sie die Lösungsblätter durch und versehen Sie *alle* Blätter zusätzlich zu Ihrer Matrikelnummer auch mit Ihrem Namen!
5. Die Lösungen zu den Aufgaben sollen möglichst gut begründet werden!
6. Nach Beendigung der Klausur sind die Lösungsblätter im Faltblatt abzugeben!

Aufgabe 1. Seien drei Punkte

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{vorgegeben.}$$

Man zeige, daß die affine Hyperebene M, welche durch die Punkte u, v, w verläuft, zu derjenigen affinen Hyperebene E parallel ist, die durch die Punkte $u + v$, $v + w$, $w + u$ hindurchgeht und berechne den Abstand *zwischen* den Ebenen M und E! ⑧

Lösung. 1. Ist $V = \operatorname{lin}\{v - u, w - v\}$ die von $v - u$ und $w - v$ aufgespannte Hyperebene, so erhält man einen zu V orthogonalen Vektor $\xi \in \mathbb{R}^3$ aus den beiden Gleichungen $3\xi_1 - 6\xi_2 = 0$ und $6\xi_2 - 3\xi_3 = 0$, also $\xi_1 = 2$, $\xi_2 = 1$, $\xi_3 = 2$.

Wegen $V = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid (\xi|x) = 0\}$ und $(\xi|u) = 12$ ergibt sich daher die Darstellung

$$M = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid (\xi|x - u) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid (\xi|x) = 12\}$$

der zu V parallelen affinen Hyperebene M durch die Punkte u, v, w.

2. Da die Hyperebene $V = \operatorname{lin}\{v - u, w - v\} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid (\xi|x) = 0\}$ auch von den Vektoren $(v + w) - (w + u) = v - u$ und $(w + u) - (u + v) = w - v$ aufgespannt wird, folgt somit aus $(\xi|u + v) = 24$ die Darstellung

$$E = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid (\xi|x - (u + v)) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid (\xi|x) = 24\}$$

der zu V parallelen affinen Hyperebene E durch die Punkte $u + v$, $v + w$, $w + u$.

3. Die Gerade $G = \operatorname{lin}\{\xi\}$ schneidet beide Ebenen M und E senkrecht. Für die Schnittpunkte $s\xi \in G \cap M$ und $t\xi \in G \cap E$ mit den unbekannten Parametern $s, t \in \mathbb{R}$ gilt demnach $(\xi|s\xi - u) = 0$ und $(\xi|t\xi - (u + v)) = 0$. Aus $\|\xi\| = 3$ ergeben sich die Beziehungen

$$s = \frac{(\xi|u)}{\|\xi\|^2} = \frac{12}{9} \quad \text{sowie} \quad t = \frac{(\xi|u + v)}{\|\xi\|^2} = \frac{24}{9}$$

und somit der Abstand $\|s\xi - t\xi\| = \frac{4}{3}\|\xi\| = 4$ der Ebenen M und E voneinander. □

Aufgabe 2. Sei ein Tetraeder T mit den vier Eckpunkten

$$0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 16 \\ -16 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{vorgegeben.}$$

1. Man berechne den Flächeninhalt *jeder* Seite sowie den Rauminhalt des Tetraeders!

2. Man bestimme den Radius $r > 0$ und den Mittelpunkt $x \in T$ jener Kugeloberfläche, welche *jede* Seite des Tetraeders *berührt!* ⑧

Lösung. 1. Der Rauminhalt R des Tetraeders T kann mit Hilfe der Gram-Matrix

$$G(u, v, w) = \begin{pmatrix} (u|u) & (u|v) & (u|w) \\ (v|u) & (v|v) & (v|w) \\ (w|u) & (w|v) & (w|w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 144 & 0 & 0 \\ 0 & 576 & 0 \\ 0 & 0 & 144 \end{pmatrix}$$

berechnet werden. Man erhält $R = \frac{1}{6}\sqrt{\det G(u, v, w)} = 576$.

2. Ebenso werden die Flächeninhalte der vier Seitenflächen des Tetraeders T bestimmt: Das Dreieck Δ_1 mit den Ecken $0, u, v$ hat den Flächeninhalt $F_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\det G(u, v)} = 144$. Das Dreieck Δ_2 mit den Ecken $0, v, w$ hat den Flächeninhalt $F_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\det G(v, w)} = 144$. Das Dreieck Δ_3 mit den Ecken $0, u, w$ hat den Flächeninhalt $F_3 = \frac{1}{2}\sqrt{\det G(u, w)} = 72$. Schließlich hat das Dreieck Δ_4 mit den Ecken u, v, w wegen

$$G(v-u, w-u) = \begin{pmatrix} (v-u|v-u) & (v-u|w-u) \\ (w-u|v-u) & (w-u|w-u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 720 & 144 \\ 144 & 288 \end{pmatrix}$$

den Flächeninhalt $F_4 = \frac{1}{2}\sqrt{\det G(v-u, w-u)} = 216$.

3. Eine Kugeloberfläche um den Mittelpunkt $x \in T$ mit dem Radius $r > 0$ berührt genau dann *jede* Seite des Tetraeders T, wenn das Lot von $x \in T$ auf die Seitenfläche Δ_k des Tetraeders T für jedes $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ ein Radiusvektor der Kugeloberfläche ist:

Betrachtet man für jedes $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ das Tetraeder T_k mit der Grundfläche Δ_k, der Spitze $x \in T$ und der (gesuchten) Höhe $r > 0$, so läßt sich der Rauminhalt R des Tetraeders T als Summe $R = \sum_{k=1}^{4} R_k$ der Rauminhalte $R_k = \frac{r}{3} F_k$ der Tetraeder T_k darstellen. Aus $R = \frac{r}{3}\sum_{k=1}^{4} F_k$ und $R = 576 = \sum_{k=1}^{4} F_k$ ergibt sich zunächst der Radius $r = 3$ derjenigen Kugeloberfläche, welche *jede* Seitenfläche des Tetraeders T berührt.

Da die drei Vektoren u, v, w paarweise orthogonal sind, erhält man schließlich

$$x = \frac{ru}{\|u\|} + \frac{rv}{\|v\|} + \frac{rw}{\|w\|} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in T$$

als Mittelpunkt jener Kugeloberfläche, die *jede* Seitenfläche des Tetraeders T berührt. □

Alternative Lösung. 3. Eine Kugeloberfläche um den Mittelpunkt $x \in T$ mit dem Radius $r > 0$ berührt genau dann *jede* Seite des Tetraeders T, wenn das Lot von $x \in T$ auf die Seitenfläche Δ_k des Tetraeders T für jedes $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ ein Radiusvektor der Kugeloberfläche ist: Da die drei Vektoren u, v, w paarweise orthogonal sind, erhält man

$$x = \frac{ru}{\|u\|} + \frac{rv}{\|v\|} + \frac{rw}{\|w\|} = \frac{r}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{r}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{r}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{r}{3}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in T$$

als Mittelpunkt jener Kugeloberfläche, welche *jede* Seitenfläche des Tetraeders berührt.

Ist $V = \operatorname{lin}\{v - u, w - v\}$ die von $v - u$ und $w - v$ aufgespannte Hyperebene, so erhält man einen zu V orthogonalen Vektor $\xi \in \mathbb{R}^3$ aus den beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} 8\xi_1 - 20\xi_2 + 16\xi_3 &= 0, \\ -12\xi_1 + 24\xi_2 &= 0, \end{aligned}$$

also etwa $\xi_1 = 8$, $\xi_2 = 4$, $\xi_3 = 1$ mit $\|\xi\| = 9$. Wegen $V = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid (\xi|y) = 0\}$ und $(\xi|u) = 72$ folgt daraus die Darstellung

$$M = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid (\xi|y - u) = 0\} = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid (\xi|y) = 72\}$$

der zu V parallelen affinen Hyperebene M durch die Punkte u, v, w. Der Kugelmittelpunkt $x \in T$ gehört zu der um den Vektor $-\frac{r\xi}{\|\xi\|}$ parallelverschobenen affinen Hyperebene

$$E = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid \big(\xi|y + \tfrac{r\xi}{\|\xi\|}\big) = 72\} = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid (\xi|y) = 72 - 9r\}.$$

Aus $x \in E$ ergibt sich schließlich wegen $(\xi|x) = 15r$ die Gleichung $15r = 72 - 9r$ und somit der Radius $r = 3$ sowie der Mittelpunkt

$$x = \frac{r}{3}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in T$$

jener Kugeloberfläche, welche *jede* Seite des Tetraeders T berührt. $\square$

Aufgabe 3. Sei die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 + 8x_2x_3 + 4x_3x_1 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^3 \text{ gegeben.}$$

Man bestimme die lokalen Extrempunkte dieser Funktion! ⑧

Lösung. 1. Um die kritischen Punkte $x \in \mathbb{R}^3$ der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ zu bestimmen, sucht man nach den Nullstellen der partiellen Ableitungen

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} D_1 f(x) & = & 4x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & = & 0 \quad \cdot(-1) \quad \cdot(-1) \\ D_2 f(x) & = & 4x_1 & + & 10x_2 & + & 8x_3 & = & 0 \quad + \\ D_3 f(x) & = & 4x_1 & + & 8x_2 & + & 10x_3 & = & 0. \quad + \end{array}$$

Elementare Umformungen dieses linearen Gleichungssystems liefern

$$\begin{array}{rcrcrcl} 4x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & = & 0 \\ & & 6x_2 & + & 4x_3 & = & 0 \quad \cdot 2 \\ & & 4x_2 & + & 6x_3 & = & 0 \mid \cdot (-3) \quad + \end{array} \quad \text{sowie} \quad \begin{array}{rcrcrcl} 4x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & = & 0 \\ & & 6x_2 & + & 4x_3 & = & 0 \\ & & & & -10x_3 & = & 0 \end{array}$$

und somit $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ als eindeutig bestimmte Lösung.

2. Um zu überprüfen, ob für $x = 0$ neben den notwendigen auch hinreichende Bedingungen für einen lokalen Extrempunkt von f erfüllt sind, sollen die Eigenwerte $\mu \in \mathbb{R}$ der symmetrischen Hesse-Matrix

$$D^2 f(0) = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & 10 & 8 \\ 4 & 8 & 10 \end{pmatrix} \in L(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$$

von f berechnet werden. Die charakteristische Gleichung $\det(D^2 f(0) - \mu E_3) = 0$ hat aufgrund folgender elementarer Umformungen die Gestalt

$$0 = \begin{vmatrix} 4-\mu & 4 & 4 \\ 4 & 10-\mu & 8 \\ 4 & 8 & 10-\mu \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-\mu & 4 & 4 \\ 0 & 2-\mu & \mu-2 \\ 4 & 8 & 10-\mu \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-\mu & 4 & 4 \\ 0 & 2-\mu & \mu-2 \\ 2\mu-4 & 0 & 2-\mu \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 4-\mu & 4 & 8 \\ 0 & 2-\mu & 0 \\ 2\mu-4 & 0 & 2-\mu \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 20-\mu & 4 & 8 \\ 0 & 2-\mu & 0 \\ 0 & 0 & 2-\mu \end{vmatrix} = (20-\mu)(2-\mu)^2.$$

Somit besitzt die Hesse-Matrix $D^2 f(0) \in L(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ die Eigenwerte $\mu_1 = \mu_2 = 2$ und $\mu_3 = 20$, woraus sich ihre positive Definitheit ergibt. Damit ist der kritische Punkt $x = 0$ ein lokaler Minimumpunkt von f. □

Aufgabe 4. Man berechne den Rauminhalt R sowie die Koordinaten $y_k = \frac{1}{R}\int_H x_k\,dx$ des Schwerpunkts $y \in \mathbb{R}^3$ der *oberen Halbkugel* $H = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 \geq 0,\ \|x\| \leq \rho\}$ mit dem Radius $\rho > 0$ um den Nullpunkt! ⑧

Lösung. 1. Jeder Punkt $x \in \mathbb{R}^3$ kann mit Hilfe der durch

$$\Psi(r,\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\cos\theta \\ r\sin\varphi\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} \quad \text{für } r \in [0,\infty[,\ \varphi \in [0,2\pi],\ \theta \in \left[-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\right]$$

gegebenen Parametrisierung $\Psi : [0,\infty[\times[0,2\pi]\times\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^3$ durch Kugelkoordinaten beschrieben werden. Die Ableitung von Ψ hat die Gestalt

$$D\Psi(r,\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\cos\theta & -r\cos\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\theta & 0 & r\cos\theta \end{pmatrix},$$

woraus sich die Dichte $\sqrt{\det DF(r,\varphi,\theta)^\intercal DF(r,\varphi,\theta)} = r^2\cos\theta$ ergibt.

2. Die Darstellung $H = \{\Psi(r,\varphi,\theta) \in \mathbb{R}^3 \mid r \in [0,\rho],\ \varphi \in [0,2\pi],\ \theta \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]\}$ der *oberen Halbkugel* liefert zunächst den Rauminhalt

$$R = \int_H dx = \int_0^\rho \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} r^2\cos\theta\,d\theta\,d\varphi\,dr = \frac{2\pi\rho^3}{3}\int_0^{\pi/2}\cos\theta\,d\theta = \frac{2\pi\rho^3}{3}.$$

3. Für die beiden ersten Koordinaten des Schwerpunkts $y = \frac{1}{R}\int_H x\,dx \in \mathbb{R}^3$ ergibt sich wegen $\int_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\sin\varphi\,d\varphi = 0$ erwartungsgemäß

$$y_1 = \frac{1}{R}\int_H x_1\,dx = \frac{1}{R}\int_0^\rho \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} r\cos\varphi\cos\theta \cdot r^2\cos\theta\,d\theta\,d\varphi\,dr = 0$$

sowie

$$y_2 = \frac{1}{R}\int_H x_2\,dx = \frac{1}{R}\int_0^\rho \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} r\sin\varphi\cos\theta \cdot r^2\cos\theta\,d\theta\,d\varphi\,dr = 0.$$

Für die dritte Koordinate erhält man wegen $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ schließlich

$$\begin{aligned} y_3 = \frac{1}{R}\int_H x_3\,dx &= \frac{1}{R}\int_0^\rho \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} r^3\sin\theta\cos\theta\,d\theta\,d\varphi\,dr \\ &= \frac{3}{2\pi\rho^3}\cdot\frac{\pi\rho^4}{4}\int_0^{\pi/2}\sin 2\theta\,d\theta = \frac{3\rho}{8}. \end{aligned}$$

Damit hat der Schwerpunkt von H die Koordinaten $y_1 = y_2 = 0$ und $y_3 = \frac{3\rho}{8}$. □

Aufgabe 5. Man bestimme eine Basis des linearen Raums V aller stetig differenzierbaren Lösungen $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ der durch die antisymmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \in L(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$$

gegebenen linearen Differentialgleichung $Dv(t) = Av(t)$ für $t \in \mathbb{R}$! ⑧

Lösung. 1. Aufgrund der Antisymmetrie ist A diagonalisierbar und hat ausschließlich imaginäre Eigenwerte: Die charakteristische Gleichung $\det(A - \mu E_3) = 0$ liefert

$$0 = \begin{vmatrix} -\mu & 2 & -1 \\ -2 & -\mu & 2 \\ 1 & -2 & -\mu \end{vmatrix} = -\mu^3 + 4 - 4 - \mu - 4\mu - 4\mu = -\mu(\mu^2 + 9)$$

und somit die Eigenwerte $\mu_1 = 0 \in \mathbb{R}$, $\mu_2 = 3\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ und $\mu_3 = \overline{\mu}_2 = -3\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ von A.

2. Um einen zu $\mu_1 = 0$ gehörenden Eigenvektor $z_1 \in \mathbb{R}^3$ zu finden, wird das homogene Gleichungssystem $(A - \mu_1 E_3)z_1 = 0$ gelöst. Elementare Umformungen des Schemas

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot 2 \\ + \quad + \\ \cdot 2 \end{array} \quad \text{liefern} \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad z_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

als Eigenvektor zu $\mu_1 = 0$ und somit die Fundamentallösung $v_1(t) = z_1$ für $t \in \mathbb{R}$.

3. Für den zu $\mu_2 = 3\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ gehörenden Eigenvektor $z_2 \in \mathbb{C}^3$ wird das homogene Gleichungssystem $(A - \mu_2 E_3)z_2 = 0$ gelöst. Elementare Umformungen des Schemas

$$\begin{pmatrix} -3\mathrm{i} & 2 & -1 \\ -2 & -3\mathrm{i} & 2 \\ 1 & -2 & -3\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{array}{l} + \\ + \\ \cdot 2 \quad \cdot 3\mathrm{i} \end{array} \quad \text{ergeben} \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 - 6\mathrm{i} & 8 \\ 0 & -4 - 3\mathrm{i} & 2 - 6\mathrm{i} \\ 1 & -2 & -3\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot (3\mathrm{i} - 1) \quad \cdot 3\mathrm{i} \\ \mid \cdot 4 \quad + \\ \mid \cdot 8 \quad + \end{array}$$

und somit

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 - 6\mathrm{i} & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 2 + 6\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad z_2 = \begin{pmatrix} 1 + 3\mathrm{i} \\ -4 \\ 1 - 3\mathrm{i} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$$

als Eigenvektor zu $\mu_2 = 3\mathrm{i}$. Bildet man den Realteil $v_2(t) = \operatorname{Re}\big(z_2 \operatorname{Exp}(3\mathrm{i}t)\big)$ und den Imaginärteil $v_3(t) = \operatorname{Im}\big(z_2 \operatorname{Exp}(3\mathrm{i}t)\big)$, so erhält man die beiden Fundamentallösungen

$$v_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \cos 3t - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \sin 3t, \quad v_3(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \sin 3t + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \cos 3t \quad \text{für } t \in \mathbb{R}.$$

4. Daraus ergibt sich die Basis $\{v_1, v_2, v_3\}$ des linearen Raums V aller stetig differenzierbaren Lösungen der Differentialgleichung $Dv(t) = Av(t)$ für $t \in \mathbb{R}$. □