Übungsaufgaben 1

# Reelle Zahlen

**Aufgabe 1.** Man beweise, daß die Beziehung

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt! ⑥

**Aufgabe 2.** Sei $\mathbb{K}$ ein geordneter Körper und $n \in \mathbb{N}$. Seien ferner *beliebige* Elemente $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{K}$ sowie *geordnete* Elemente $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ derart vorgegeben, daß

$$x_k \leq x_\ell \quad \text{für alle } k, \ell \in \{1, \ldots, n\} \text{ mit } k \leq \ell$$

gilt. Ist $f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ irgendeine bijektive Abbildung, die die Ordnung

$$y_{f(k)} \leq y_{f(\ell)} \quad \text{für alle } k, \ell \in \{1, \ldots, n\} \text{ mit } k \leq \ell$$

herstellt, so zeige man, daß dann stets die Ungleichung

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leq \sum_{k=1}^{n} x_k y_{f(k)}$$

erfüllt ist! ⑧

**Aufgabe 3.** Man weise nach, daß in einem Körper $\mathbb{K}$ stets die Identität

$$\prod_{k=1}^{n} x_k - \prod_{k=1}^{n} y_k = \sum_{\ell=1}^{n} \left( \prod_{k=\ell+1}^{n+1} x_k \right) (x_\ell - y_\ell) \left( \prod_{k=0}^{\ell-1} y_k \right)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ sowie $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{K}$ gilt, wenn die Voraussetzung $y_0 = x_{n+1} = \mathbb{1}$ erfüllt ist! ⑥