Übungsaufgaben 11

Integration reeller Funktionen

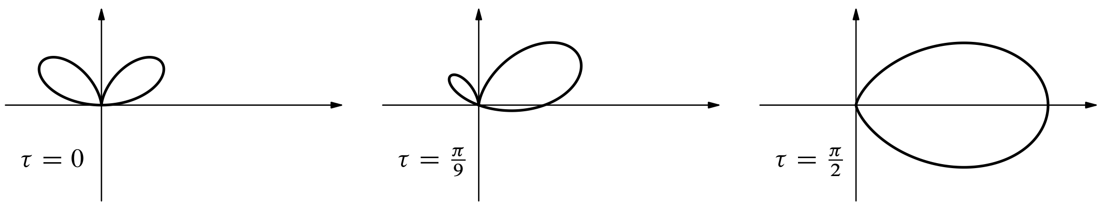
Aufgabe 1. Seien eine Längeneinheit $d > 0$ und ein Formparameter $\tau \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sowie das *Bifolium* durch die Funktion $s : [-\tau, \pi - \tau] \to \mathbb{C}$ in Polarkoordinaten

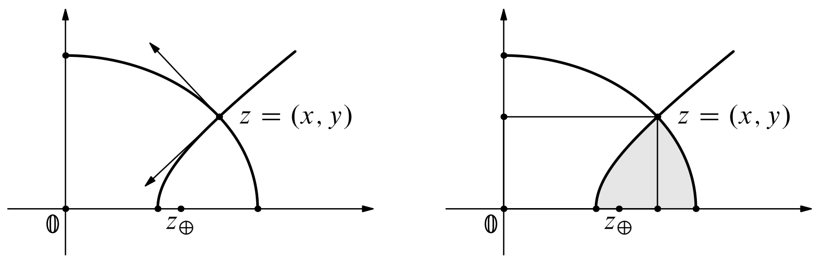
$$s(t) = d \sin(t + \tau) \cos^2 t \cdot (\cos t, \sin t) \quad \text{für } t \in [-\tau, \pi - \tau] \text{ vorgegeben.}$$

Man zeige, daß jene Fläche, welche vom ganzen Bifolium $\left\{s(t) \in \mathbb{C} \mid t \in [-\tau, \pi - \tau]\right\}$ umschlungen wird, den Inhalt

$$\int_{-\tau}^{\pi-\tau} \frac{|s(t)|^2 dt}{2} = \frac{(1 + 4\sin^2\tau)\,\pi d^2}{32}$$

besitzt, indem man (in geeigneter Weise mehrmals) teilweise integriert! ⑥





Aufgabe 2. Seien reelle Zahlen $0 < c < \delta < a$ sowie ferner $b = \sqrt{a^2 - \delta^2} > 0$ und $d = \sqrt{\delta^2 - c^2} > 0$ gegeben. Der Bogen $E = \left\{(a\cos\theta, b\sin\theta) \in \mathbb{C} \mid \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right\}$ bzw. $H = \left\{(c\cosh t, d\sinh t) \in \mathbb{C} \mid t \in [0, \infty[\right\}$ ist Teil einer Ellipse bzw. einer Hyperbel mit den *gemeinsamen* Brennpunkten $z_\ominus = (-\delta, 0)$ und $z_\oplus = (\delta, 0)$.

1. Man zeige, daß sich die Bögen E und H in $z = \left(\frac{ac}{\delta}, \frac{bd}{\delta}\right)$ senkrecht schneiden!
2. Man leite her, daß jene Fläche, welche von den Bögen E und H sowie der reellen Achse eingeschlossen wird, den Inhalt $F = \frac{1}{2}\,ab \arccos\frac{c}{\delta} - \frac{1}{2}\,cd \operatorname{arcosh}\frac{a}{\delta}$ besitzt! ⑧

Aufgabe 3. Man berechne das Integral

$$\int_a^b \frac{d\xi}{\xi^2(1 + \xi^2)^2}$$

für beliebig vorgegebene Intervallgrenzen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < b$! ⑥