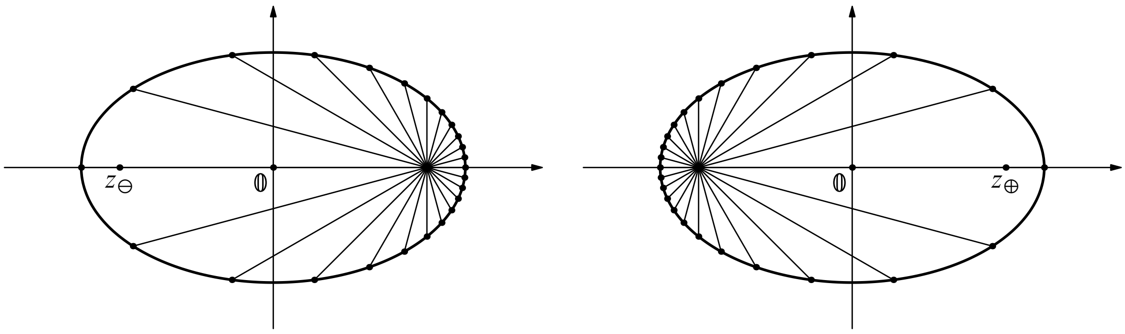
Übungsaufgaben 12

Uneigentliche Integrale

Aufgabe 1. Seien beliebige Parameter $\omega, \beta > 0$ und Grenzen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gegeben. Man berechne die beiden Integrale

$$\int_a^b \mathrm{e}^{-\omega t} \sin \beta t \, dt \quad \text{und} \quad \int_a^b \mathrm{e}^{-\omega t} \cos \beta t \, dt$$

und führe die Grenzübergänge $a \to 0$ und $b \to \infty$ aus! ⑥



Aufgabe 2. Seien reelle Zahlen $a \geq b > 0$ sowie $\delta = \sqrt{a^2 - b^2}$ vorgegeben und die Ellipse $\{s(\theta) \in \mathbb{C} \mid \theta \in [-\pi, \pi]\}$ mit den Halbachsen a und b sowie den beiden Brennpunkten $z_\oplus = (\delta, 0) \in \mathbb{C}$ und $z_\ominus = (-\delta, 0) \in \mathbb{C}$ mit Hilfe der durch

$$\rho(\theta) = \frac{b^2}{a + \delta \cos \theta} \quad \text{und} \quad s(\theta) = z_\oplus + \rho(\theta)(\cos \theta, \sin \theta) \quad \text{für } \theta \in [-\pi, \pi]$$

definierten Funktionen $\rho : [-\pi, \pi] \to]0, \infty[$ und $s : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ in Polarkoordinaten bezüglich des Pols $z_\oplus$ dargestellt. Man berechne den integralen Mittelwert

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \rho(\theta) \, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{b^2 d\theta}{a + \delta \cos \theta}$$

der Abstandsfunktion ρ über alle Polarwinkel $\theta \in [-\pi, \pi]$, indem man durch eine Variablentransformation zu einem Integral über eine rationale Funktion gelangt! ⑥

Aufgabe 3. Man berechne das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty \frac{2\xi \ln(\xi) \, d\xi}{(1 + \xi^2)^2}$$

durch teilweise Integration, die eine Zurückführung auf ein Integral über eine rationale Funktion ermöglicht, das durch Teilbruchzerlegung berechnet werden kann! ⑧