Übungsaufgaben 13

Kurven und Wege in der Ebene

Aufgabe 1. Sei ein Parameter $\delta > 0$ gegeben und der uneigentliche Weg $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ längs einer *Kettenlinie* mittels

$$\gamma(t) = \left(t, \delta \cosh \tfrac{t}{\delta}\right) \quad \text{für } t \in \mathbb{R} \text{ definiert.}$$

1. Wird die Längenfunktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des uneigentlichen Weges γ durch

$$\varphi(t) = \int_0^t |D\gamma(s)|\, ds \in \mathbb{R} \quad \text{für } t \in \mathbb{R} \text{ gegeben,}$$

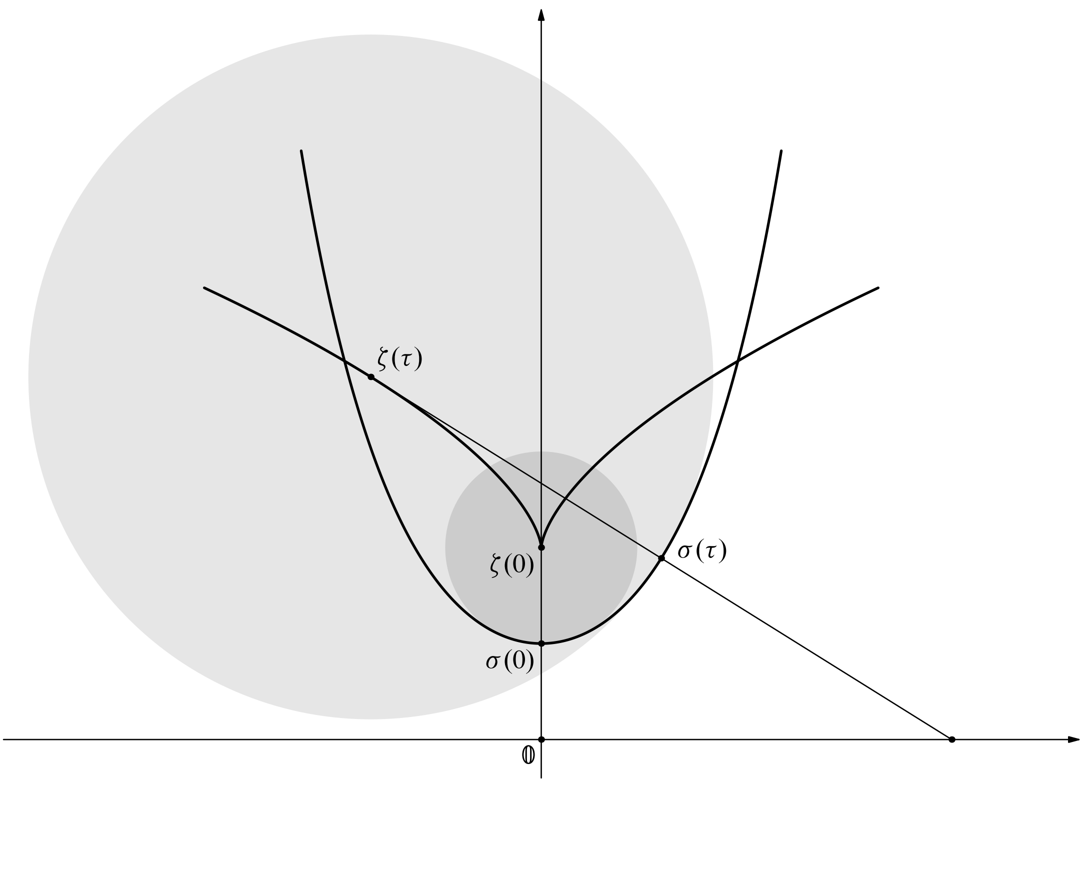
so bestimme man den durch Verkettung $\gamma = \sigma \circ \varphi$ definierten und nach seiner Länge parametrisierten uneigentlichen Weg $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ entlang der Kettenlinie!

2. Man berechne die Krümmung $\kappa(\tau) \in \mathbb{R}$ des uneigentlichen Weges σ sowie den Mittelpunkt $\zeta(\tau) \in \mathbb{C}$ des Krümmungskreises an σ in $\tau \in \mathbb{R}$!

3. Man zeige, daß der uneigentliche Weg $\zeta : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ der Krümmungsmittelpunkte differenzierbar ist und für jedes $\tau \in \mathbb{R}$ stets ein Faktor $\lambda(\tau) \in \mathbb{R}$ mit

$$D\zeta(\tau) = \lambda(\tau)\big(\zeta(\tau) - \sigma(\tau)\big) \quad \text{existiert!}$$

4. Man überzeuge sich davon, daß die Weglängen für jedes $\tau \in \mathbb{R}$ die Beziehung $|\zeta(\tau) - \sigma(\tau)| = \delta + \left|\int_0^\tau |D\zeta(t)|\, dt\right|$ erfüllen! ⑧



Aufgabe 2. Sei ein Radius $\delta > 0$ und die Funktion $\kappa :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ durch

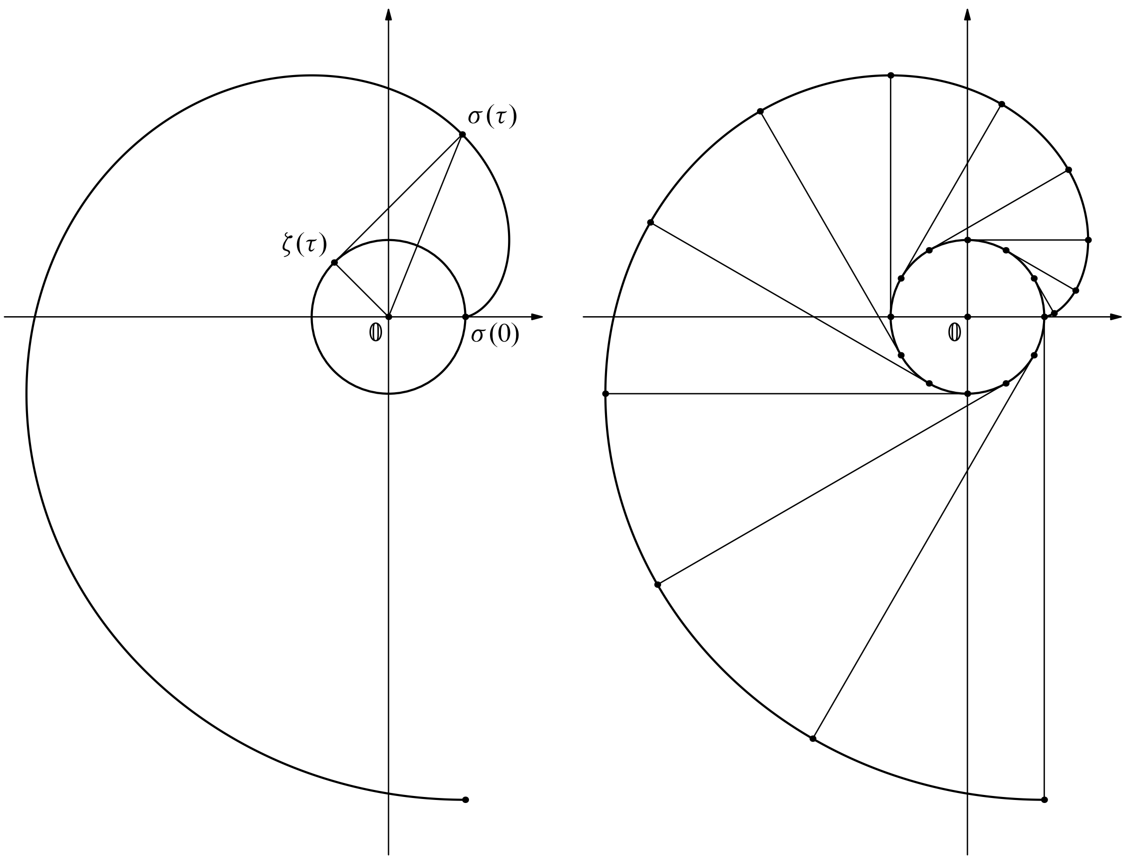
$$\kappa(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\delta\tau}} \quad \text{für } \tau \in]0,\infty[\text{ gegeben.}$$

1. Man bestimme den durch

$$\theta(\tau) = \int_0^\tau \kappa(t)\,dt, \quad v(\tau) = (\cos\theta(\tau), \sin\theta(\tau)) \quad \text{und} \quad \sigma(\tau) = (\delta, 0) + \int_0^\tau v(t)\,dt$$

für $\tau \in]0,\infty[$ definierten *uneigentlichen* Weg $\sigma :]0,\infty[\to \mathbb{C}$, welcher nach seiner Länge parametrisiert ist und in jedem Punkt $\tau \in]0,\infty[$ die Krümmung $\kappa(\tau)$ besitzt!

2. Man berechne in jedem Punkt $\tau \in]0,\infty[$ jeweils den Mittelpunkt $\zeta(\tau) \in \mathbb{C}$ des Krümmungskreises an σ und zeige, daß der uneigentliche Weg $\zeta :]0,\infty[\to \mathbb{C}$ dieser Krümmungsmittelpunkte längs einer *Kreislinie* mit dem Radius $\delta > 0$ verläuft! ⑥



Aufgabe 3. Welche Länge hat der durch

$$\gamma(t) = \delta t \operatorname{Exp}(2\pi \mathrm{i} t) = \delta t(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) \in \mathbb{C} \quad \text{für } t \in [0, n]$$

gegebene Weg $\gamma : [0, n] \to \mathbb{C}$ längs der *Archimedischen Spirale* mit $n \in \mathbb{N}$ Windungen, welche jeweils den Abstand $\delta > 0$ voneinander haben? ⑥