Übungsaufgaben 3

Zahlenfolgen und Zahlenreihen

Aufgabe 1. Man zeige, daß die Reihe $\left(\sum_{k=1}^{n}\prod_{\ell=0}^{m}\frac{1}{k+\ell}\right)$ reeller Zahlen für beliebig vorgegebenes $m \in \mathbb{N}$ im Grenzprozeß $n \to \infty$ gegen die Summe $\frac{1}{m \cdot m!}$ konvergiert! ⑥

Aufgabe 2. Man weise nach, daß die Reihe $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^{2k}\right)$ bzw. $\left(\sum_{k=0}^{n} b_k x^{2k+1}\right)$ mit den durch $a_k = \frac{(-1)^k}{(2k)!}$ bzw. $b_k = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}$ für $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ definierten Koeffizienten für jedes $x \in \mathbb{K}$ jeweils absolut gegen eine endliche Summe

$$c(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{2k} \in \mathbb{K} \quad \text{bzw.} \quad s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{2k+1} \in \mathbb{K} \tag{1}$$

konvergiert und schließe durch Multiplikation solcher Reihen darauf, daß die durch diese Grenzwerte definierten Funktionen $c, s : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ den Additionstheoremen

$$c(x+y) = c(x)c(y) - s(x)s(y) \quad \text{sowie} \quad s(x+y) = s(x)c(y) + c(x)s(y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{K}$ genügen! ⑧

Aufgabe 3. Seien reelle Zahlen $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$ mit $0 < a_1 \leq b_1$ beliebig vorgegeben und die beiden Folgen (a_n) und (b_n) reeller Zahlen durch

$$a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} \quad \text{sowie} \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{für } n \in \mathbb{N} \text{ definiert.}$$

1. Man weise nach, daß die beiden Relationen

$$0 < a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \quad \text{und} \quad a_n b_n = a_1 b_1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ gelten!}$$

2. Man schließe daraus, daß die beiden Folgen (a_n) und (b_n) jeweils gegen denselben Grenzwert $\sqrt{a_1 b_1}$ konvergieren! ⑥