Übungsaufgaben 7

Analytische Funktionen

Aufgabe 1. Sei die Funktion $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $s(x) = (1-\cos x)(x-\sin x)$ für $x \in \mathbb{R}$ definiert. Man entwickle die Funktion s in eine Potenzreihe (s_n) um den Mittelpunkt $x_0 = 0$ und berechne ihre Koeffizienten! ⑥

Aufgabe 2. Der Cosinus $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soll im Punkt $x_0 = 0$ durch eine Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ approximiert werden, welche eine Hyperbel beschreibt und durch

$$h(x) = c - \sqrt{b + ax^2} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

gegeben ist. Wie müssen die reellen Zahlen $a > 0$, $b > 0$ und $c \in \mathbb{R}$ gewählt werden, damit sich die Funktionen h und cos im Punkt $x_0 = 0$ von maximaler Ordnung tangential berühren? ⑥

Aufgabe 3. Sei die gebrochene rationale Funktion $s : \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{0}, \mathbb{1}\} \to \mathbb{C}$ durch

$$s(\xi) = \frac{\mathbb{1}}{\xi^2(\mathbb{1} - \xi)^2} \quad \text{für } \xi \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{0}, \mathbb{1}\} \text{ definiert.}$$

Man entwickle s um einen beliebig vorgegebenen Mittelpunkt $\xi_0 \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}$ in eine Potenzreihe (s_n) und berechne deren Koeffizienten sowie Konvergenzradius! ⑧