Übungsaufgaben 8

Elementare Funktionen

Aufgabe 1. Seien $a > 0$, $b > 0$ und $\delta = \sqrt{a^2 + b^2} > 0$ sowie der positive Ast der *Hyperbel* mit den Brennpunkten $z_+ = (\delta, 0) \in \mathbb{C}$ und $z_- = (-\delta, 0) \in \mathbb{C}$ sowie den Halbachsen a und b durch die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ vorgegeben, welche durch

$$f(t) = (a \cosh t, b \sinh t) \quad \text{für } t \in \mathbb{R}$$

definiert wird. Sei ferner $\tau \in \mathbb{R}$ ein beliebig fixierter Punkt.

1. Man weise nach, daß $|f(\tau) - z_-| - |f(\tau) - z_+| = 2a$ gilt, somit die Kreislinien

$$\big\{x \in \mathbb{C} \mid |x - z_-| = 2a\big\} \quad \text{und} \quad \big\{x \in \mathbb{C} \mid |x - f(\tau)| = |z_+ - f(\tau)|\big\}$$

genau einen Punkt $x_+ \in \mathbb{C}$ und die Kreislinien

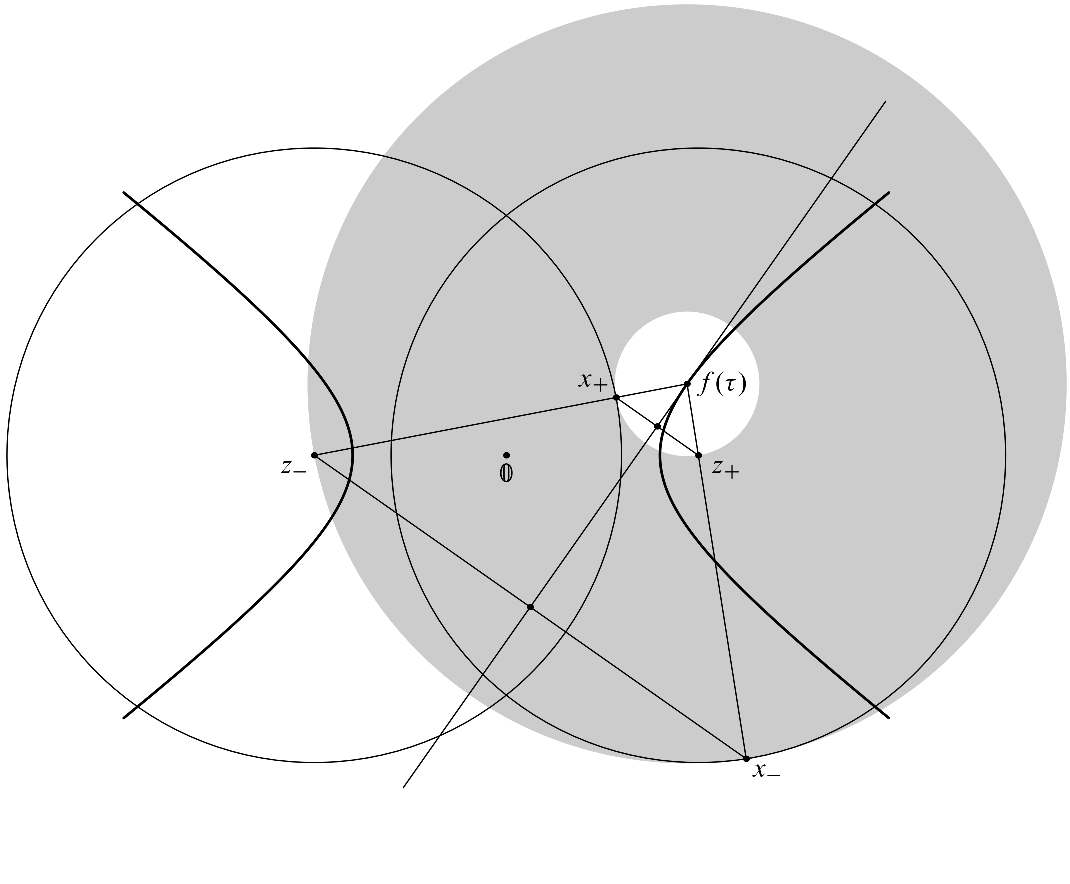
$$\big\{x \in \mathbb{C} \mid |x - z_+| = 2a\big\} \quad \text{und} \quad \big\{x \in \mathbb{C} \mid |x - f(\tau)| = |z_- - f(\tau)|\big\}$$

genau einen Punkt $x_- \in \mathbb{C}$ gemeinsam haben!

2. Wird die Linearisierung $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, welche f in τ tangential berührt, durch

$$g(t) = f(\tau) + Df(\tau)(t - \tau) \quad \text{für } t \in \mathbb{R}$$

gegeben, so zeige man, daß es Punkte $t_+ \in \mathbb{R}$ und $t_- \in \mathbb{R}$ mit $g(t_+) = \frac{1}{2}(x_+ + z_+)$ und $g(t_-) = \frac{1}{2}(x_- + z_-)$ gibt und außerdem $|g(t_+)| = |g(t_-)| = a$ gilt! ⑧



Aufgabe 2. Man beweise, daß die elementaren Grenzwertbeziehungen

$$\lim_{\xi\to\infty} \frac{\ln(\xi)}{\xi^x} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{\xi\to 0} \frac{x^\xi - 1}{\xi} = \ln(x) \quad \text{für jedes } x \in \mathbb{R} \text{ mit } x > 0$$

sowie

$$\lim_{\xi\to\infty} \frac{\xi^x}{\exp(\xi)} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{\xi\to 0} (1+\xi)^{x/\xi} = \exp(x) \quad \text{für jedes } x \in \mathbb{R}$$

gelten! ⑥

Aufgabe 3. *Zeitlich veränderliche Schwingungen* mit anschwellender bzw. gedämpfter Amplitude können durch Funktionen $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschrieben werden, die mit Hilfe einer vorgegebenen *Dämpfung* $a \in \mathbb{R}$ und *Frequenz* $b \in \mathbb{R}$ durch

$$u(t) = \mathrm{e}^{at} \sin bt \quad \text{für } t \in \mathbb{R} \text{ definiert werden.}$$

Seien dabei $r \in [0, \infty[$, $\beta \in \mathbb{R}$ Polarkoordinaten von $(a, b) = (r\cos\beta, r\sin\beta) \in \mathbb{C}$.

1. Man beweise (induktiv), daß die Funktion $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Ableitungen

$$D^k u(t) = r^k \mathrm{e}^{at} \sin(bt + k\beta) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ besitzt!}$$

2. Man weise nach, daß die Funktion $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Differentialgleichung

$$D^2 u(t) - 2a Du(t) + r^2 u(t) = 0 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R} \text{ erfüllt!}$$

3. Man zeige durch Restabschätzung, daß die Taylor-Reihe $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} (rt)^k \sin k\beta\right)$ um den Entwicklungspunkt $t_0 = 0$ in jedem Punkt $t \in \mathbb{R}$ gegen $u(t)$ konvergiert! ⑥